

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL



# APLICACIONES DE TEORÍA DE REDES

Autores:

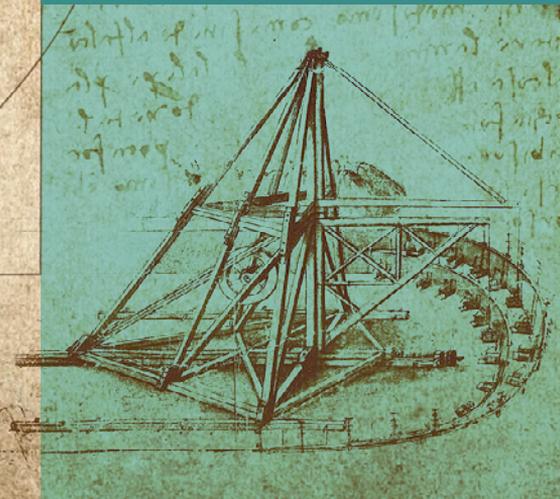
Adrián Gutiérrez Gómez  
Alejandro Martínez Garnica  
Alejandro Felipe Zárate Pérez  
José Alfredo Cabrera Sánchez  
Juan Pablo Cisneros Castañeda  
Johans Francisco Luna Pérez  
Seleni Lara Jáuregui

Coordinadora:

Idalia Flores de la Mota

CUADERNILLO  
DE DIVULGACIÓN

# 19





# APLICACIONES DE TEORÍA DE REDES

Autores:

Adrián Gutiérrez Gómez  
Alejandro Martínez Garnica  
Alejandro Felipe Zárate Pérez  
José Alfredo Cabrera Sánchez  
Juan Pablo Cisneros Castañeda  
Johans Francisco Luna Pérez  
Seleni Lara Jáuregui

Coordinadora:

Idalia Flores de la Mota



CUADERNILLO  
DE DIVULGACIÓN

# 19

Para visualizar la obra  
te sugerimos

Acrobat Reader  
Haz Click

Flores, De la Mota, Idalia (Coordinadora).  
*Aplicaciones de teoría de redes*  
Universidad Nacional Autónoma de México,  
Facultad de Ingeniería, 2024, 69 p.

### *Aplicaciones de teoría de redes*

Primera edición electrónica  
de un ejemplar (11 MB) Formato PDF  
Publicado en línea en febrero de 2024

D.R. © 2024, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional  
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación  
Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA  
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la  
Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la  
reproducción o transmisión total o parcial por cualquier  
medio sin la autorización escrita del titular de los derechos  
patrimoniales.

Hecho en México.

---

Unidad de Apoyo Editorial  
Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz  
Formación editorial : Luis Enrique Vite Rangel

# CONTENIDO

PRÓLOGO .....	6
---------------	---

<b>CAPÍTULO 1.</b> Aplicación del modelo de ruta más corta al servicio de entrega en paquetería utilizando drones.....	8
--	---

1.1 Introducción.....	8
-----------------------	---

1.2 Problema de ruta más corta .....	9
--------------------------------------	---

1.3 Breve historia de los drones .....	12
--	----

1.4 Caso aplicado .....	12
-------------------------	----

<b>CAPÍTULO 2.</b> Método de Ruta Crítica (CPM).....	15
--	----

2.1 Introducción .....	15
------------------------	----

2.2 Representación de un modelo de red .....	16
--	----

2.3 Método CPM .....	19
----------------------	----

<b>CAPÍTULO 3.</b> Mis vacaciones y la teoría de redes .....	27
--	----

3.1 Introducción .....	27
------------------------	----

3.2 Descripción del problema .....	28
------------------------------------	----

3.3 Modelado del problema.....	30
--------------------------------	----

3.4 Solución del problema .....	32
---------------------------------	----

3.5 Conclusiones.....	34
-----------------------	----

<b>CAPÍTULO 4.</b> Redes y grafos en el análisis de sistemas susceptibles de corrupción.....	36
4.1 Introducción .....	36
4.2 Conceptos básicos .....	37
4.3 Aplicación .....	38
<b>CAPÍTULO 5.</b> Ruta más corta de línea 3 de metro a Edificio T .....	42
5.1 Introducción .....	42
5.2 Ruta más corta .....	42
5.3 Problemática.....	43
5.4 Metodología .....	43
5.5 Resolución programación dinámica .....	45
5.6 Resolución algoritmo de Dijkstra.....	46
5.7 Conclusiones y recomendaciones .....	50
<b>CAPÍTULO 6.</b> Abastecimiento de plataformas petroleras en el golfo de México (Vía marina) .....	51
6.1 Introducción .....	51
6.2 Problemática.....	52
6.3 Solución del problema con TSP. ....	54
6.4 Conclusiones.....	56
<b>Capítulo 7.</b> Diseño e integración de sistemas de redes de riego .....	58
7.1 Introducción .....	58
7.2 Definiciones .....	59
7.3 Árbol de expansión mínima.....	61
7.4. Aplicación en el diseño de sistemas de redes de riego .....	63
7.5. Integración de los sistemas de redes de riego.....	65
7.6. Conclusiones .....	66
REFERENCIAS .....	67

## PRÓLOGO

Como parte de las actividades del Departamento de Investigación de Operaciones e Ingeniería Industrial de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Facultad de Ingeniería, UNAM, nos hemos propuesto el desarrollo de material didáctico y de divulgación a través de la elaboración de una serie de cuadernillos de difusión, así como de apuntes que complementen la bibliografía de los cursos de la Facultad. Este material se centra en los tópicos que aborda la Teoría de Redes a través de aplicaciones sencillas. El propósito es apoyar tanto la labor docente como aumentar el conocimiento de la materia por los estudiantes a nivel maestría y licenciatura de las diferentes áreas de la ingeniería, así como de licenciaturas afines, para que conozcan el potencial que ofrecen estas herramientas.

Este material tiene como uno de sus objetivos introducir al lector en los temas de una manera clara y sencilla, pero sin perder el rigor teórico en su tratamiento. La selección, edición y revisión técnica del material fue realizada por Idalia Flores De la Mota, y la elaboración de cada capítulo por parte de los alumnos de las maestrías en Investigación de Operacio-

nes e Ingeniería Industrial: Adrián Gutiérrez Gómez, Alejandro Martínez Garnica, Alejandro Felipe Zárate Pérez, José Alfredo Cabrera Sánchez, Juan Pablo Cisneros Castañeda, Johans Francisco Luna Pérez, Seleni Lara Jáuregui, Victoria Mayela Luna Rojas.

Los autores consideran que la redacción de este material fue una experiencia enriquecedora y esperan que los estudiantes de ingeniería lo encuentren grato, informativo y valioso para el estudio de las aplicaciones de la Teoría de Redes en sus campos de interés.

Quiero agradecer el apoyo en revisión y correcciones a la Maestra María Cuairán Ruidíaz, de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, por el respaldo brindado y por la colaboración para la realización de la edición; y a el LDG Luis Enrique Vite Rangel por la dedicación y disposición para el diseño y formación de la obra. Asimismo, a la Lic. Patricia García Naranjo titular de la UDAE por su apoyo en la publicación de este texto.

Agradezco en especial a Victoria Mayela Luna por su apoyo al organizar y revisar todo el material.

Idalia Flores De La Mota  
*Coordinadora de la publicación*

1

2

3

4

5

6

7

7

## CAPÍTULO 1

# Aplicación del modelo de ruta más corta al servicio de entrega en paquetería utilizando drones

Por Adrián Gutiérrez Gómez

## 1.1 Introducción

Este capítulo trata sobre una aplicación de la teoría de redes, en específico del problema de ruta más corta y cómo se emplea en la entrega de paquetería utilizando drones. Es entonces conveniente hablar primero sobre términos generales de redes para entender el contexto del problema de ruta más corta, seguido de una historia de los drones y sus perspectivas para el futuro, y concluir con ejemplos reales de cómo se ha aplicado el modelo de ruta más corta.

Los problemas de flujo de red se encuentran frecuentemente en el área de optimización y constituyen un campo importante, ya que surgen naturalmente en el análisis y diseño de grandes sistemas, como las redes de comunicación, transporte y fabricación. También se pueden utilizar para modelar clases importantes de problemas combinatorios. Existen distintos tipos de problemas de flujo de red y problemas combinatorios, algunos ejemplos son: la ruta más corta, la asignación, el flujo máximo,

1

2

3

4

5

6

7

8

el transporte, el transbordo, el árbol de expansión, el emparejamiento, el vendedor ambulante, la asignación generalizada, el enrutamiento de vehículos y el flujo de múltiples productos, todos estos constituyen la clase más común de problemas de optimización práctica.

Una de las ventajas de utilizar la modelación mediante redes es el componente visual; hace que una amplia gama de problemas de la industria y el gobierno sean mucho más fáciles de comprender que con las técnicas de formulación clásicas de optimización lineal, y constituye una de las características más conspicuas de estos modelos. Los problemas de flujo de la red consisten en puntos de oferta y demanda, junto con varias rutas que conectan estos puntos y se utilizan para transferir la oferta a la demanda. Estas rutas pueden contener puntos de transbordo intermedios. A menudo, los puntos de oferta, demanda y transbordo pueden modelarse mediante los nodos de un gráfico o red, y las rutas pueden modelarse mediante las rutas o arcos de la red. Además, puede haber múltiples “tipos” de oferta / demanda (o “productos básicos”) que comparten las rutas. También puede haber algunas limitaciones en las características de las rutas, como su capacidad de carga y algunos costos asociados con el uso de rutas particulares. Tales situaciones se modelan naturalmente como problemas de optimización de la red mediante los cuales, en términos generales, tratamos de seleccionar rutas que minimicen el costo de transferencia de la oferta a la demanda.

## 1.2 Problema de ruta más corta

Primero se presenta una definición formal del problema de ruta más corta:

Suponga que a cada arco  $(i,j)$  de una gráfica se le asigna un costo escalar  $a_{ij}$ , y suponga que definimos el costo de una trayectoria hacia adelante como la suma de los costos de sus arcos. Dado un par de nodos, el problema de la ruta más corta es encontrar una ruta directa que conecte estos nodos y tenga un costo mínimo.

Se puede establecer una analogía entre los arcos y sus costos, y las carreteras en una red de transporte y sus longitudes, respectivamente. En este contexto de transporte, el problema se convierte en encontrar la ruta más corta entre dos puntos geográficos que nos provea de un mínimo costo.

El problema del camino más corto se puede encontrar en un abanico amplio de contextos. Por ejemplo, en una red de comunicación de datos, puede denotar el retraso promedio de un paquete para cruzar el enlace de comunicación  $(i,j)$ , en cuyo caso una ruta más corta es una ruta de demora promedio mínima que se puede utilizar para enrutar el paquete desde su origen a su destino. Como otro ejemplo, si  $p_{ij}$  es la probabilidad de que un arco dado  $(i,j)$  en una red de comunicación sea utilizable, y cada arco se pueda utilizar independientemente de todos los demás arcos, entonces el producto de las probabilidades de los arcos de una trayectoria proporciona una medida de confiabilidad del camino. Con esto en mente, se ve que encontrar la ruta más confiable que conecta dos nodos es equivalente a encontrar la ruta más corta entre los dos nodos con longitudes de arco. El problema de la ruta más corta también surge a menudo como una subrutina en algoritmos que resuelven otros problemas más complicados. Algunos ejemplos son el algoritmo primal-dual para resolver el problema de flujo de costo mínimo, y los algoritmos de proyección y gradiente condicional para resolver problemas de flujo de múltiples productos básicos. Sin embargo, es importante destacar que no todas las aplicaciones del problema de la ruta más corta implican minimizar la distancia recorrida desde el origen hasta el destino. De hecho, es posible que ni siquiera impliquen viajes. En cambio, los enlaces (o arcos) pueden representar actividades de algún otro tipo, por lo que elegir un camino a través de la red corresponde a seleccionar la mejor secuencia de actividades. Los números que dan las "longitudes" de los enlaces podrían ser, por ejemplo, los costos de las actividades, en cuyo caso el objetivo sería determinar qué secuencia de actividades minimiza el costo total.

Otra versión del problema de la ruta más corta es encontrar las rutas más cortas desde el origen hasta todos los demás nodos de la red y una versión aún más general del problema de la ruta más corta es encontrar las rutas más cortas de cada nodo a todos los demás. Otra opción es eliminar la restricción de que las “distancias” (valores de arco) no sean negativas.

También se pueden imponer restricciones a los caminos que se pueden seguir. Dicho lo anterior, es posible plantear el problema de encontrar una ruta más corta desde el nodo  $t$  al nodo  $s$  como el siguiente problema de flujo de costo mínimo:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x_{ij} \\ & \text{sujeto a} \\ & \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = s \\ -1 & \text{si } i = t \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned} \quad (1)$$

Para ver esto, asociemos con cualquier camino hacia adelante  $P$  del vector de flujo  $x$  con componentes dados por:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \text{ pertenece a } P \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (2)$$

Entonces  $x$  es factible para el problema (1) y el costo de  $x$  es igual a la longitud de  $P$ . Por lo tanto, si un vector  $x$  de la forma (2) es una solución óptima del problema (1), la ruta correspondiente  $P$  es la más corta.

### 1.3 Breve historia de los drones

Los drones tienen sus inicios en la primera guerra mundial, aunque sus aplicaciones y formas son muy distintas a lo que conocemos hoy en día. El espionaje era uno de los motivos principales para utilizar un dron en esa época, otro uso era como objetos sencillos de práctica debido a que no eran particularmente precisos.

El cambio de aplicación militar a aplicación civil fue cuando la NASA desarrolló y usó drones en 1969 con el propósito de controlar un avión desde una estación en tierra, pero que llevaba un piloto por si algo fallaba. En 1990 dirigió un programa junto a otras industrias para desarrollar tecnologías que ayudaran a abrir el mercado de los drones y que dio buenos resultados. Entre 1994 y 2003 la NASA mejoró el desempeño de los drones en la investigación medioambiental, dotándolos de diversos sensores para la toma de datos meteorológicos.

Uno de los motivos críticos para el aumento en la popularidad de los drones es el abaratamiento de los costos de equipos electrónicos, la eliminación de costos excesivos en sensores, softwares, baterías, fuselajes, tamaño. Siendo Estados Unidos el país que más ha vendido y desarrollado drones desde el año 2016.

### 1.4 Caso aplicado

Una ventaja de utilizar drones para la entrega de paquetería es que se puede circular por las calles en sentido contrario al flujo del tránsito, algo que los medios de transporte convencionales como motocicletas o camionetas no pueden hacer, esto implica que las distancias se vuelven líneas rectas desde el punto o nodo de oferta hasta el punto de demanda, sin embargo, pueden surgir casos en los que los drones tengan que evadir o evitar edificios altos, espectaculares, o inclusive otros obstáculos como podrían representar antenas o cerros.

A continuación, se presenta una red que ilustra lo anterior.

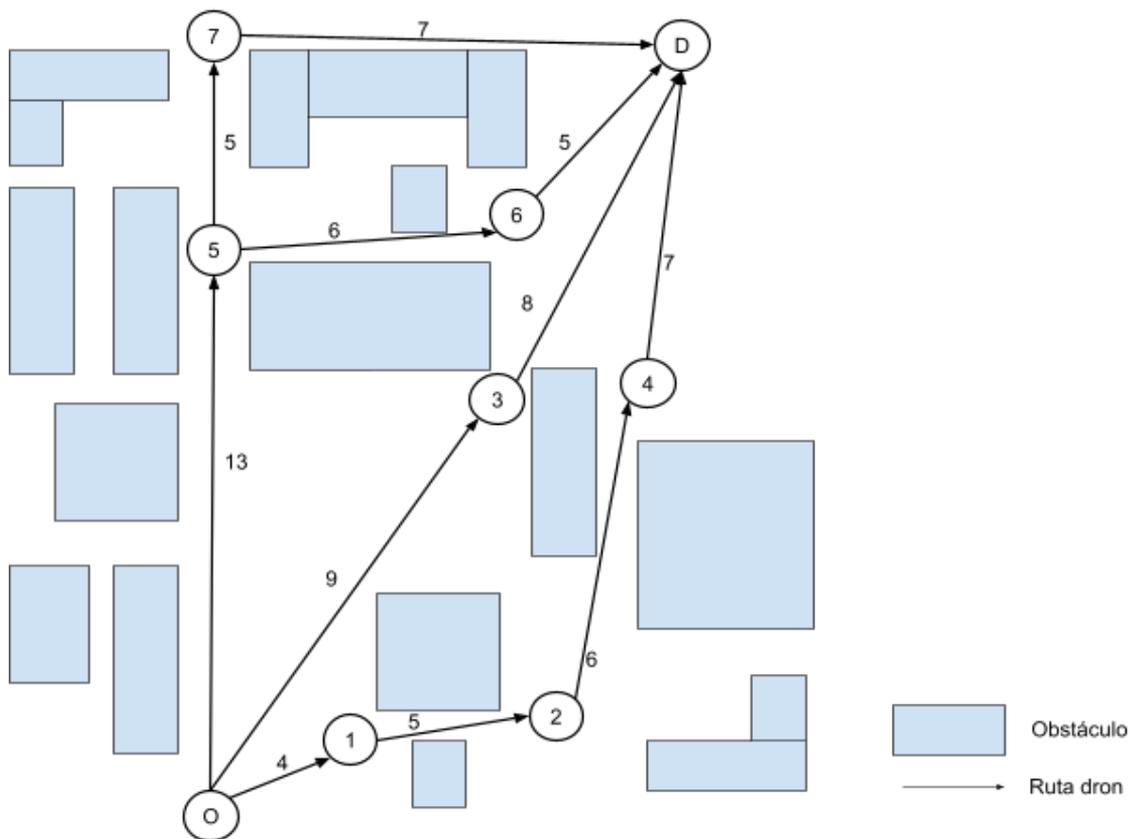


Figura 1. Ruta con obstáculos

En este caso se tiene un nodo de oferta  $O$  que puede representar un almacén, una camioneta o camión o una casa, y se tiene un nodo de demanda  $D$  que es el punto a donde se desea entregar el paquete con el dron. Los rectángulos representan distintos obstáculos que impiden al dron viajar en línea recta del nodo  $O$  al nodo  $D$ . Los nodos 1-7 son puntos en los que el dron puede maniobrar para cambiar de dirección, se pueden agregar más nodos para hacer trayectorias más precisas, solo se debe

tener en cuenta las distancias correspondientes. La solución para este ejemplo es prácticamente evidente con la ruta más corta de  $0 \rightarrow 3 \rightarrow D$  la cual implica una distancia de 17 unidades; menor a las otras tres rutas planteadas.

Hong, I., Kuby, M. & Murray, A. (2018) profundizan en esta aplicación con radios de cobertura entre diversas estaciones de drones para contrarrestar la desventaja que significan las baterías en los drones, así como para cubrir múltiples puntos de demanda que puedan surgir en una zona y evadir de mejor forma obstáculos que se puedan presentar.

1

2

3

4

5

6

7

## CAPÍTULO 2

# Método de Ruta Crítica (CPM)

Por Alejandro Martínez Garnica

## 2.1 Introducción

En la gestión de proyectos, uno de los recursos más importantes es sin duda el tiempo que durará el proyecto ya que de esto depende otro recurso fundamental como lo es el costo de este. Por tal motivo es de suma importancia definir desde un inicio y, acorde a las actividades, cuánto es el tiempo estimado que nos llevará el proyecto, así como cada una de sus actividades.

Para realizar lo anteriormente descrito, la mayoría de los proyectos usan métodos de estimación en forma de redes tales como el **PERT** (por sus siglas en inglés *Program Evaluation and Review Techniques*) o técnica de revisión y evaluación de programa o el **CPM** (*Critical Path Method*) o método de la ruta crítica. Tanto el método PERT como el CPM son herramientas gráficas usadas por los PM (*Project managers*) para estimar y gestionar la duración de las actividades de un proyecto y cuyo principal objetivo es determinar la duración del proyecto e identificar las actividades denominadas críticas.

La principal diferencia entre un método y otro radica en que el PERT es determinístico y emplea tiempos estimados en cada una de las ac-

1

2

3

4

5

6

7

tividades, basándose en 3 tiempos: el tiempo optimista, el tiempo más probable y el tiempo pesimista; mientras que el CPM considera tiempo conocido con exactitud, además de que con este método el principal objetivo es determinar la ruta que es prioritaria y la cual no debe atrasarse (o visto de otra manera, cuáles son las holguras que tenemos en cada actividad y que de cierto modo pueden aplazarse) ya que de hacerlo se puede incurrir en una duración más extensa del proyecto y a su vez supone un incremento en los costos de este y hasta su cancelación.

## 2.2 Representación de un modelo de red

En ambos casos, se requiere conocer una lista con todas las actividades con las que cuenta el proyecto. Para cada una de las actividades se puede contar con una actividad predecesora que requieren ser terminadas para que comience una nueva actividad. Usualmente las actividades se muestran en una tabla a partir de la cual debemos construir una gráfica donde se relacionen las actividades con sus predecesoras. En dicha representación gráfica, cada una de las actividades es representada como un arco, mientras que los nodos representan la culminación de una o más actividades.

Como ejemplo, supóngase que contamos con un proyecto de solo dos actividades: *A* y *B*, y que *A* es predecesora de *B*. La representación gráfica quedaría de la siguiente manera:



Figura 2.

Ahora bien, supóngase que existe una tercera actividad *C* que se debe llevar a cabo una vez finalizadas las actividades *A* y *B*. Esto gráficamente quedaría de la siguiente manera:

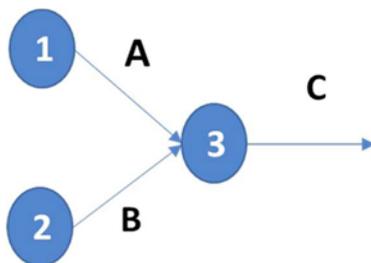


Figura 3.

En este escenario el nodo 3 indica que la actividad *A* y *B* se han concluido y que en ese momento da inicio la actividad *C*.

Por otra parte, si la actividad *A* fuera quien precede a las actividades *B* y *C*, quedaría la red de la siguiente forma:

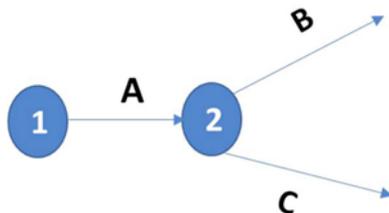


Figura 4.

Basados en un conjunto de actividades y la relación con sus predecesoras, podemos describir ciertas reglas a la hora de llevarlo a su forma gráfica:

1. El nodo 1 siempre representará el inicio del proyecto y esta actividad no debe de contar con actividades predecesoras.

2. El nodo final debe representar el término de todas las actividades del proyecto.
3. Una actividad no debe ser representada por más de un arco en la red.
4. Dos nodos deben estar conectados por no más de un arco.

Para no incumplir con las últimas dos reglas antes descritas, en ocasiones es necesario introducir a la red una actividad artificial que tiene tiempo de duración 0.

Por ejemplo, supongamos que las actividades A y B son predecesoras de una actividad C y que además comienzan al mismo tiempo. Esto gráficamente se vería así:

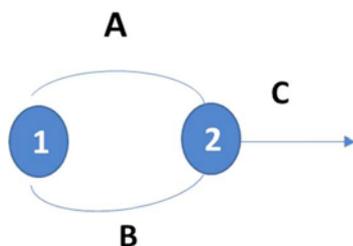


Figura 5.

Sin embargo, si revisamos la regla 4 esto no podría hacerse. Para arreglar este problema, introducimos una actividad artificial indicada con un arco punteado como se muestra a continuación:

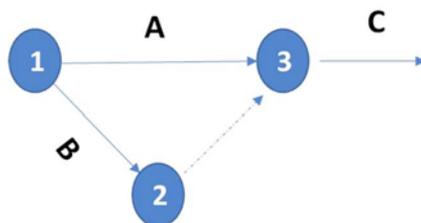


Figura 6.

De esta manera, podemos garantizar que no se incumple con la regla 4. Cabe mencionar que la numeración de los nodos debe ser de tal forma que siempre una actividad conecte un nodo de menor numeración con uno de mayor identificación en el sentido de avance del proyecto.

### 2.3 Método CPM

Consideremos el proyecto definido en la siguiente tabla:

Actividad	Predecesoras	Duración (Días)
A	-	6
B	-	9
C	A, B	8
D	A, B	7
E	D	10
F	C, E	12

Existen dos conceptos indispensables para la aplicación del método CPM:

1. El tiempo más temprano para un nodo  $i$  es el instante más inmediato en el cual puede ocurrir el evento correspondiente al nodo  $i$ .
2. El tiempo más tardío para un nodo  $i$  es el último instante en el cual puede ocurrir el evento correspondiente al nodo  $i$  sin retrasar la duración total del proyecto.

En este caso, dado que las actividades  $C$  y  $D$  tienen los mismos predecesores es necesario incorporar una actividad artificial para no infringir la regla 3. La red quedaría de la siguiente manera:

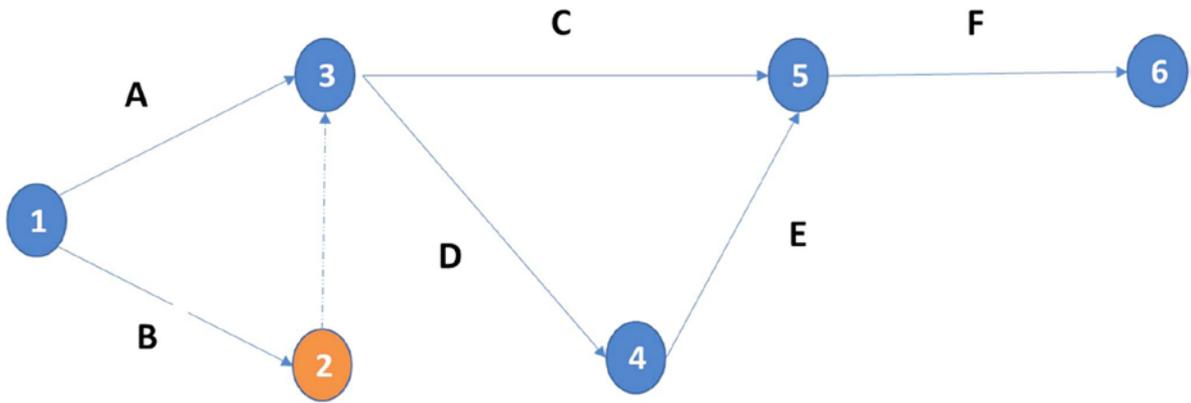


Figura 7.

### Resolución por medio de una red

Comenzamos fijando el tiempo como cero en el nodo inicial para calcular los tiempos más tempranos para cada actividad. Luego, se calcula el intervalo de tiempo que transcurre entre el inicio y las actividades inmediatas al comienzo del proyecto.

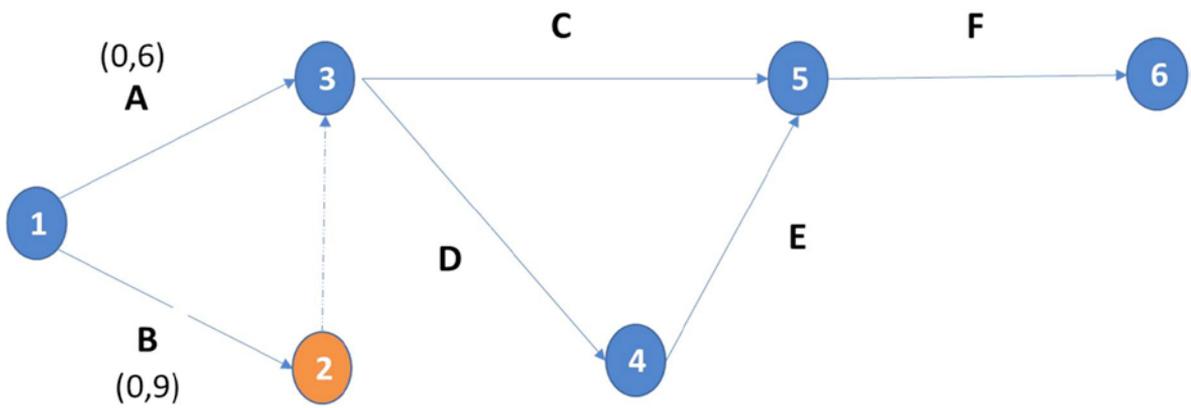


Figura 8.

1

2

3

4

5

6

7

Debido a que la actividad artificial no tiene duración, el tiempo acumulado al nodo 3, para que sean terminadas todas las actividades predecesoras a dicho nodo, corresponde a 9 días. En otras palabras, el tiempo más temprano para el nodo 3 es 9 días. Luego, las actividades que comienzan en el nodo 3 no pueden comenzar antes de 9. Lo anterior quedaría de la siguiente manera:

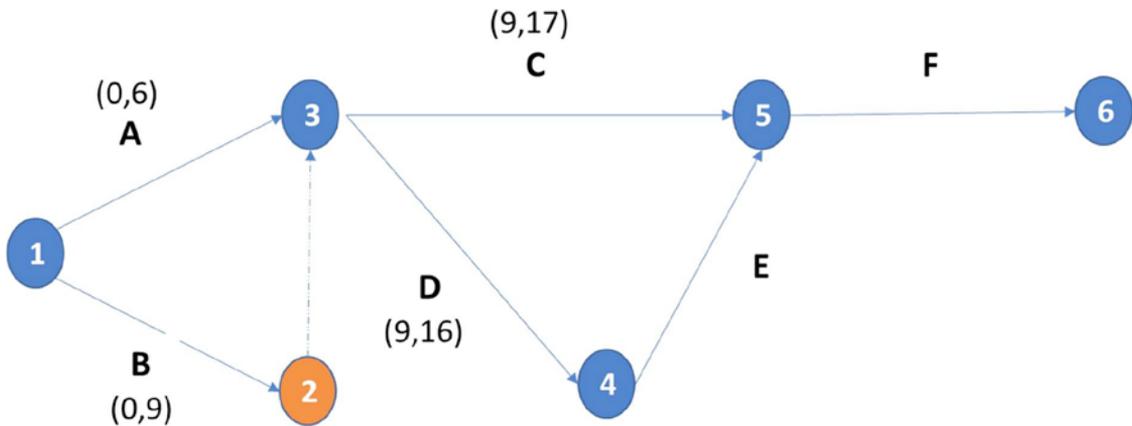


Figura 9.

Podemos darnos cuenta de que ahora es posible completar el intervalo de tiempo de desarrollo para la actividad E.

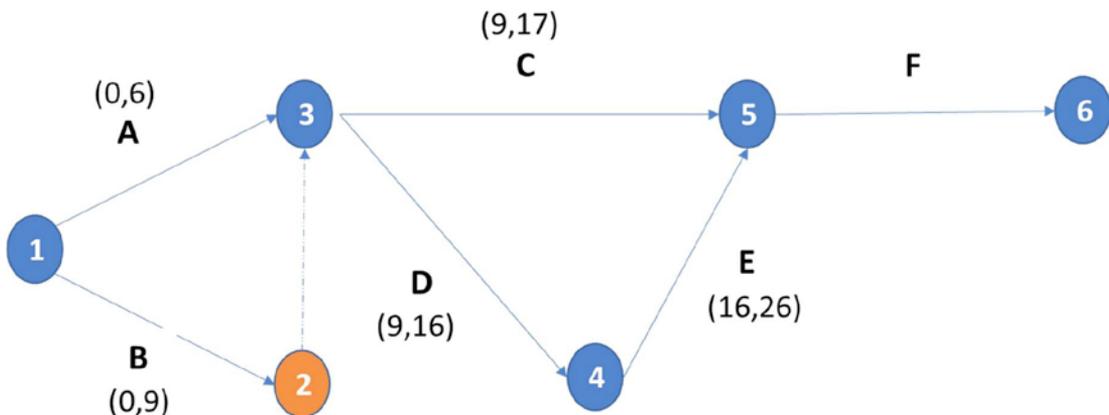


Figura 10.

Por último, el tiempo más temprano para el nodo 5 es de 26 días, por lo que la actividad *F* solo puede comenzar en ese momento.

Los intervalos de tiempo más temprano para todas las actividades del proyecto se muestran a continuación:

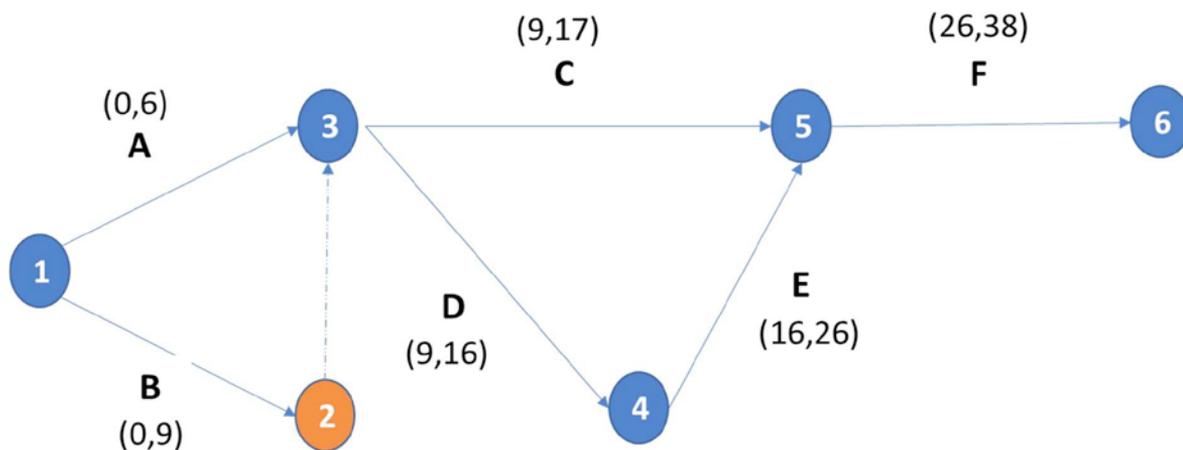


Figura 11.

Con base en esta figura, podemos concluir que la duración mínima del proyecto es de 38 días, cantidad que corresponde al camino más largo para llegar del nodo inicial 1 al nodo final 6.

Ahora, como segunda etapa se procede a calcular los tiempos más tardíos para cada nodo. El objetivo consiste en determinar cuánto es posible retardar el inicio de cada actividad sin afectar la duración total del proyecto. Para lograr dicho fin, se comienza desde el nodo final. En este caso, dado que existe una única actividad que llega a dicho nodo no es posible retardarla sin afectar la duración del proyecto.

Esto queda asentado en la siguiente figura que muestra el intervalo de tiempo más tardío para la última actividad entre corchetes.

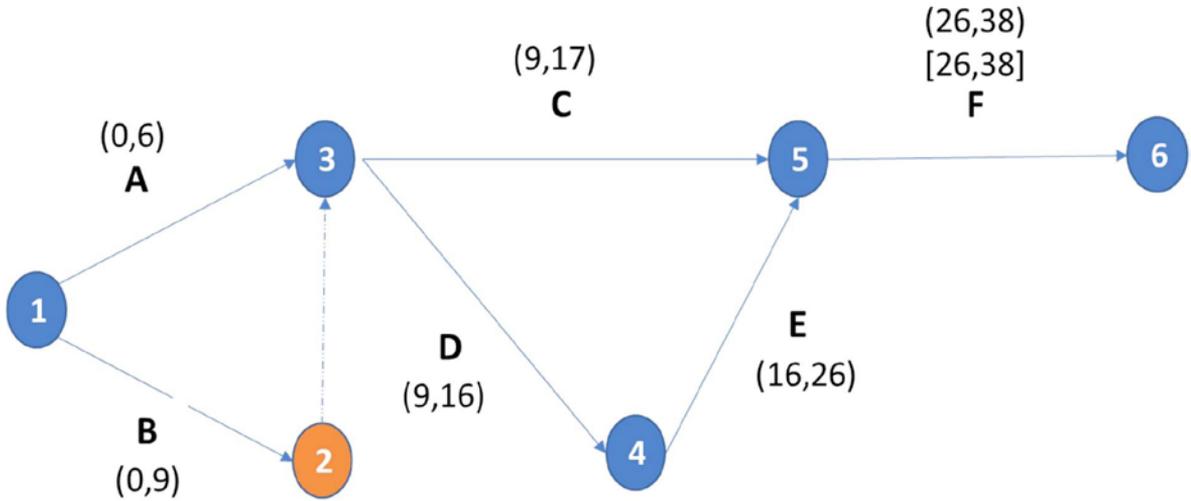


Figura 12.

Las actividades que llegan al nodo 5 terminan a más tardar en el día 26, por lo tanto, es posible retardar la actividad C en  $26 - 17 = 9$  días. Se agregan los intervalos de duración de tiempo más tardío a la red en la figura mostrada a continuación:

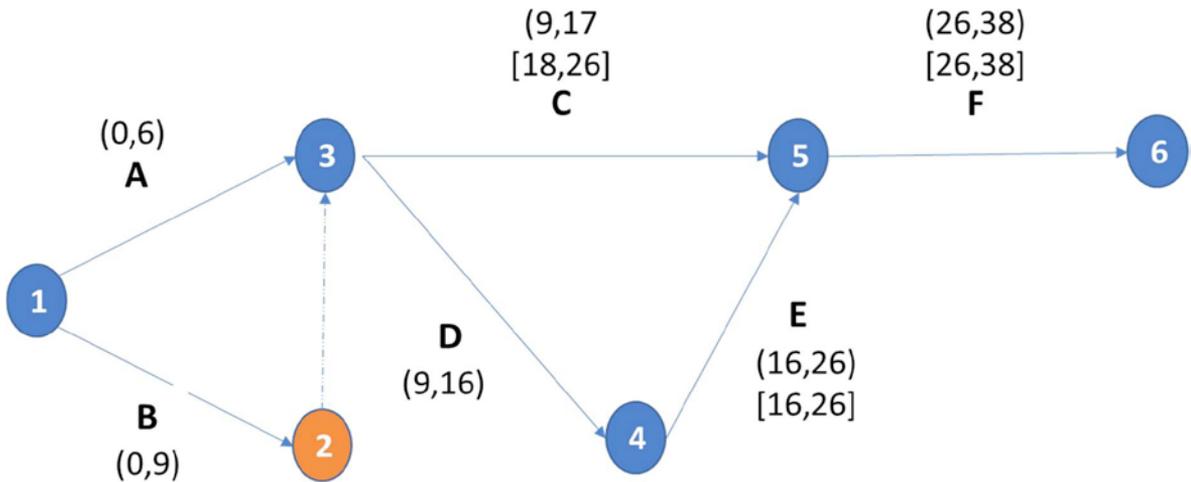


Figura 13.

1

2

3

4

5

6

7

El nodo 4 tiene como tiempo más tardío 26 días, por lo que no es factible retardar la actividad D.

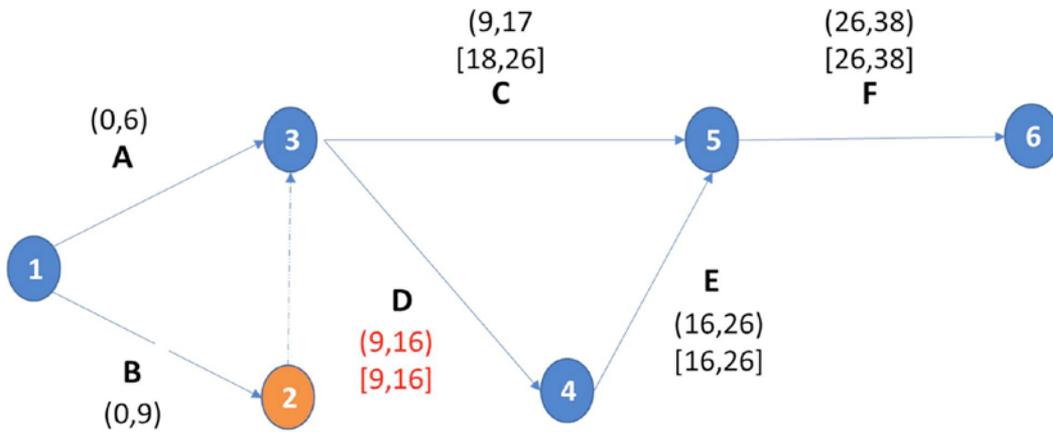


Figura 14.

De esta manera, el nodo 3 tiene como tiempo más tardío 9 días, por lo tanto, las actividades deben llegar a más tardar el día 9. Como la actividad artificial no tiene duración, la actividad B no puede ser retardada. La actividad A puede ser retardada en  $9 - 6 = 3$  días como se muestra a continuación:

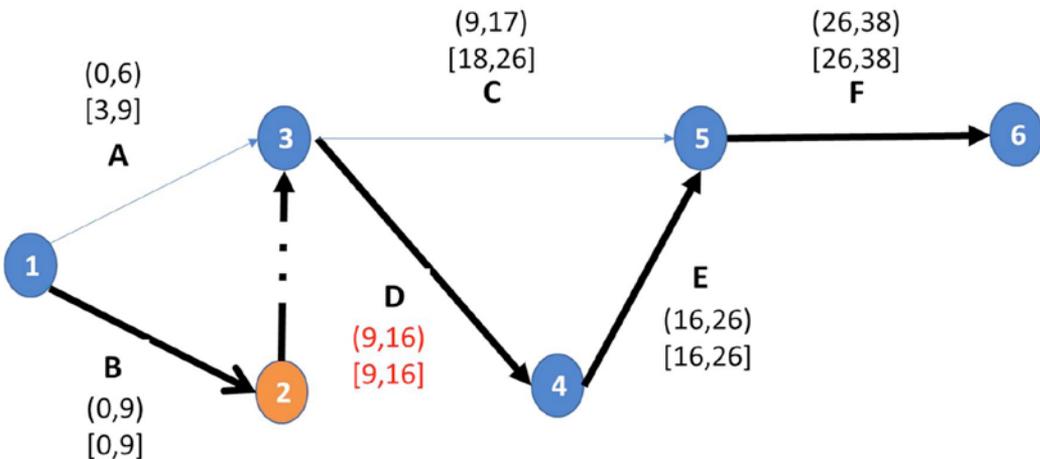


Figura 15.

De lo anterior se puede concluir:

1. Una actividad crítica es aquella que no puede ser retardada sin afectar la duración total del proyecto. En otras palabras, en el tiempo más temprano y el tiempo más tardío de inicio de la actividad son idénticos.
2. Un camino desde el nodo inicial al final constituido únicamente por actividades críticas se denomina ruta crítica. Es decir, constituye el camino que no puede ser retrasado sin afectar la duración total del proyecto, o bien, la ruta más larga entre los nodos inicial y final.

Basados en las conclusiones anteriores, la ruta crítica del proyecto corresponde a las actividades *B - Ficticia - D - E - F* según los cálculos realizados. La ruta crítica se ha marcado con línea más gruesa y de color negro. Es importante mencionar que en un proyecto puede existir más de una ruta crítica.

### Resolución Mediante LP

Para determinar la ruta crítica mediante programación lineal podemos definir las siguientes variables:

$x_{ij}$ : tiempo acumulado hasta el nodo  $j$

De acuerdo con ello, las restricciones por satisfacer son:

$$x_j \geq x_i + t_{ij}$$

Es decir, para cada arco  $(i,j)$  que conecta al nodo  $j$  se debe cumplir que el tiempo acumulado desde el nodo  $i$  más la duración de la actividad que co-

1

2

3

4

5

6

7

necta el nodo  $i$  con el  $j$  ( $t_{ij}$ ) deber ser mayor al tiempo acumulado al nodo  $j$ . Como el objetivo es completar el proyecto, interesa minimizar la diferencia entre el tiempo acumulado al nodo inicial ( $x_1$ ) frente al nodo final ( $x_f$ ):

$$\text{Minimizar } z = x_f - x_1$$

Aplicando las variables definidas en el ejemplo se obtiene:

$$\text{Minimizar } z = x_6 - x_1$$

Duración del proyecto

*Sujeto a*

$x_3 \geq x_1 + 6$	Arco (1,3)
$x_2 \geq x_1 + 9$	Arco (1,2)
$x_5 \geq x_3 + 8$	Arco (3,5)
$x_4 \geq x_3 + 7$	Arco (3,4)
$x_5 \geq x_4 + 10$	Arco (4,5)
$x_6 \geq x_5 + 12$	Arco (5,6)
$x_3 \geq x_2$	Arco (2,3)
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$	

Resolviendo el problema se obtiene una solución óptima:  $z = 38$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 9$ ,  $x_3 = 9$ ,  $x_4 = 16$ ,  $x_5 = 26$ ,  $x_6 = 38$ , lo que indica que el proyecto puede ser completado en 38 días. Evidentemente el problema anterior tiene muchas soluciones alternativas debido a que las actividades pueden ser retrasadas sin afectar la duración del proyecto y a la arbitrariedad en fijar el instante de inicio, sin embargo, todas ellas poseen como valor de la función objetivo  $z = 38$ .

1

2

3

4

5

6

7

## CAPÍTULO 3

# Mis vacaciones y la teoría de redes

Por Alejandro Felipe Zárate Pérez

## 3.1 Introducción

Todos hemos salido de vacaciones alguna vez, o incluso no necesariamente salir de vacaciones sino hemos realizado planes para visitar ciertos lugares durante un día, por ejemplo, el fin de semana salir a comer, ir al cine, etc. Para lo cual necesitamos de una planeación, realizar un itinerario para que podamos llevar a cabo todo lo que tenemos planeado. Por lo general, este itinerario lo realizamos de manera empírica, es decir, calculando “a ojo” los tiempos, las distancias y los lugares que alcanzaremos a visitar según nuestras estimaciones.

Y por lo regular funciona, la mayoría de las veces logramos realizar lo planeado. Sin embargo, las cosas cambian cuando salimos de vacaciones, ya que es común que no conozcamos la dinámica del lugar que visitaremos, es decir, los tiempos, el tráfico, la lejanía de los lugares por visitar, etc.

Por lo que es mejor utilizar los recorridos preestablecidos por las agencias turísticas de los lugares. Sin embargo, no siempre los recorridos incluyen todos los lugares de nuestro interés.

En este breve trabajo de divulgación ejemplificaremos cómo con un poco de teoría de redes podemos armar nuestro propio recorrido toman-

1

2

3

4

5

6

7

do en cuenta los lugares que deseamos visitar y el tiempo que tenemos disponible para visitarlos.



Figura 16. Pensando en las vacaciones

Por lo cual no dejes de leer, esto se podrá interesante...

### 3.2 Descripción del problema

Para nuestro ejemplo utilizaremos como lugar de vacaciones la ciudad de Guadalajara, la cual tiene una gran cantidad de sitios por visitar: iglesias, artesanías, pueblos mágicos e incluso su gastronomía.



Figura 17. Ciudad de Guadalajara

Sin embargo, no todo se encuentra en la misma ciudad, varios de los atractivos turísticos se encuentran en los municipios conurbados, lo que hace necesaria una planeación para realizar la visita de los lugares de interés.

En nuestro caso hemos elegido los siguientes lugares para visitar:

- Catedral de Guadalajara
- Catedral de Zapopan
- Tlaquepaque
- Tonalá
- Tequila
- Lago de Chapala

Con estos 6 lugares intentaremos establecer una ruta de visita, para lo cual tomaremos en cuenta que tenemos solo 4 días para visitarlos, es decir, necesitamos encontrar la ruta más corta posible para visitar todos los lugares dentro del tiempo establecido.



Figura 18. Municipios cercanos

### 3.3 Modelado del problema

Este problema de visitar varios lugares no es nuevo, de hecho, es un problema clásico de la investigación de operaciones: el problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés).

Este es uno de los problemas de optimización más estudiados por la complejidad que presenta, ya que, aunque pueda parecer un problema muy simple, si la cantidad de ciudades por visitar es muy grande, el tiempo para encontrar una solución a la mejor ruta posible puede ser muy tardado.

El problema se expresa de la siguiente forma:

*“Dado un conjunto de ciudades por visitar, un agente viajero debe encontrar la ruta que le permita visitar todas las ciudades una única vez, asegurando que la distancia que recorra sea mínima”*

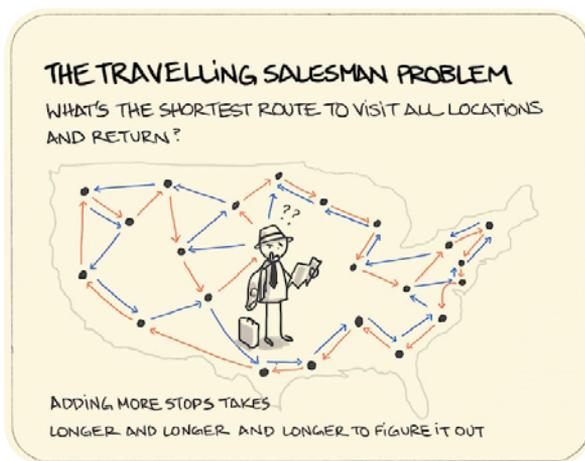


Figura 19. El problema del agente viajero

Dadas sus características este problema se clasifica como un problema de optimización combinatoria, donde cada una de las variables que se toman en cuenta puede tener valores, lo cual implica que el número de combinaciones (rutas) crezca de forma exponencial.

Este problema se considera NP Completo, es decir, no es posible determinar que encontraremos una solución en un tiempo de cómputo razonable.

Por lo cual, existen diversos métodos para encontrar una solución, entre ellos mencionaremos de manera general solo tres:

- **Fuerza bruta.** Este método consiste en probar todas las posibles soluciones hasta hallar la mejor ruta posible.
- **Algoritmos exactos.** Algoritmos diseñados para encontrar siempre la solución óptima.
- **Algoritmos heurísticos.** Algoritmos diseñados para hallar una solución muy buena, cercana al óptimo, en una cantidad de tiempo muy razonable.

Para elegir alguno de los métodos anteriores debemos tomar en cuenta la cantidad de lugares por visitar, siendo la peor opción el método de fuerza bruta, ya que este solo será viable si la cantidad de lugares es muy pequeña.

En el caso de los algoritmos exactos podemos utilizar herramientas como la programación entera o el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i, j=0}^n c_{ij} x_{ij} \\
 0 \leq x_{ij} \leq 1 & \quad i, j = 0, \dots, n \\
 x_{ij} \text{ integer} & \quad i, j = 0, \dots, n \\
 \sum_{i=0, i \neq j}^n x_{ij} = 1 & \quad j = 0, \dots, n \\
 \sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij} = 1 & \quad i = 0, \dots, n \\
 u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 & \quad 1 \leq i \neq j \leq n.
 \end{aligned}$$

Figura 20. Programación entera

En los algoritmos heurísticos podemos mencionar los algoritmos genéticos o el algoritmo de colonia de hormigas, los cuales pueden encontrar soluciones enteras muy cercanas al óptimo en un tiempo muy corto.

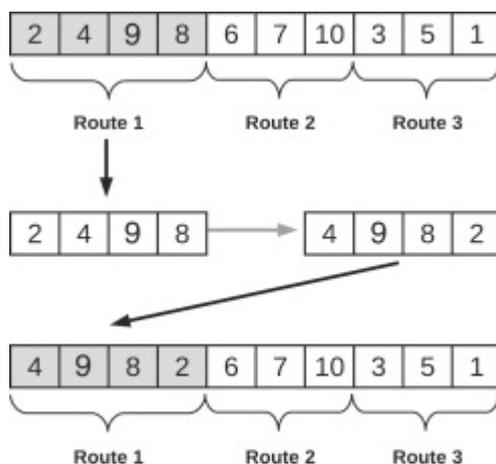


Figura 21. Algoritmo genético

### 3.4 Solución del problema

Pero regresemos a nuestro problema original de visitar varias localidades. Lo primero que tenemos que realizar es una matriz de distancias entre cada uno de los puntos que deseamos visitar.

Dentro de esta matriz colocaremos el tiempo entre cada uno de los puntos, este tiempo tomará en cuenta el trayecto y la estancia estimada en el lugar.

La matriz resultante es la siguiente:

	Guadalajara	Zapopan	Tlaquepaque	Tonalá	Chapala	Tequila
Guadalajara	0	3	3	3	5	5
Zapopan	3	0	5	6	6	6
Tlaquepaque	3	5	0	3	4	7
Tonalá	3	6	3	0	3	5
Chapala	5	6	4	3	0	7
Tequila	5	6	7	5	7	0

O visto como una red lo tenemos en la siguiente figura, omitimos los tiempos para que se vean mejor las conexiones entre las ciudades:

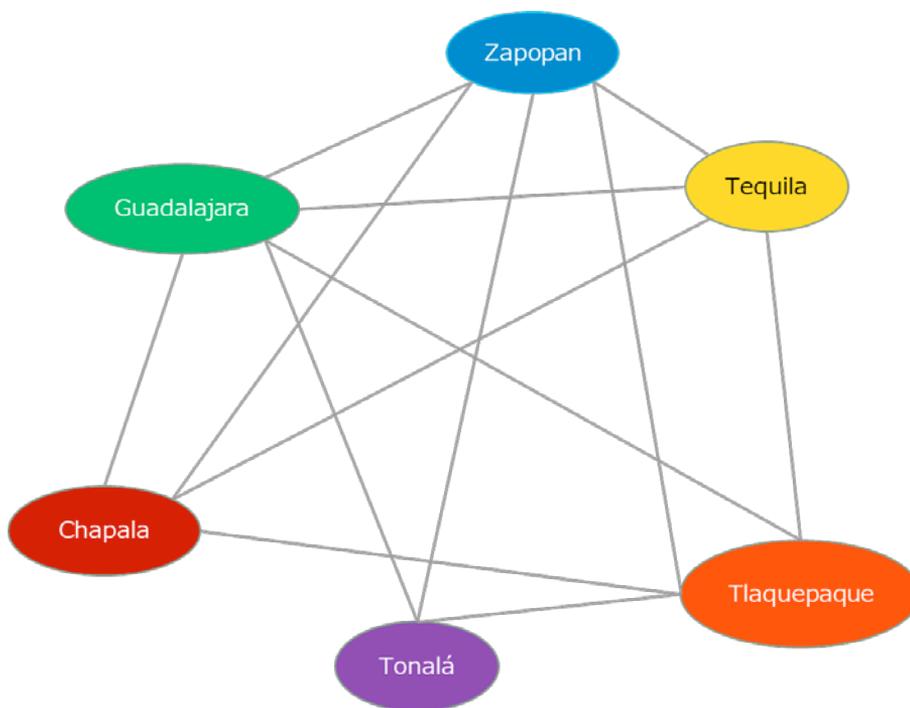


Figura 22. Red de los lugares por visitar

Con los datos disponibles utilizamos tres y métodos específicos:

- **Programación entera.** Se plantearon las ecuaciones necesarias para minimizar el tiempo de la ruta. Este planteamiento es el más general de los tres y no está recomendado cuando se tienen demasiados lugares, ya que las ecuaciones necesarias pueden ser inmanejables.
- **Algoritmo de Dijkstra.** Este es un algoritmo especializado en redes para encontrar la ruta mínima en una red.
- **Algoritmo genético.** Este es un algoritmo heurístico, es un algoritmo no exacto pero que ofrece un rendimiento sobresaliente ya que las soluciones arrojadas en poco tiempo se aproximan mucho al óptimo correspondiente.

No vamos a revisar en este documento los detalles de cada una de las soluciones, solo nos enfocaremos en el resultado final.

En todos los casos la mejor ruta encontrada fue:

**Guadalajara ⇒ Tonalá ⇒ Tlaquepaque ⇒ Chapala ⇒ Tequila ⇒ Zapopan**

### 3.5 Conclusiones

Después de realizar el ejercicio con los métodos elegidos se obtuvo la misma respuesta, en este caso es normal debido a que la cantidad de lugares es de solo seis, por lo que las combinaciones de posibles rutas es un número pequeño.

Se esperaría que los resultados fueran distintos cuando la cantidad de lugares fuera de más de veinte ya que en este caso con los algoritmos elegidos tardarían distintos tiempos y, por lo tanto, dependiendo del tiempo otorgado a cada uno se obtendría una solución, una aproximación a la solución o el tiempo no alcanzaría para resolverlo con el método elegido.

1

2

3

4

5

6

7

Asimismo, para el planteamiento de este documento asumimos que el recorrido sería completo, es decir, comenzamos en un lugar y recorremos todos los lugares hasta regresar al inicio, en este caso Guadalajara.

Sin embargo, para planear rutas de este tipo lo ideal sería utilizar un punto de partida y cada día realizar la visita de la mayor cantidad de lugares para regresar siempre al mismo sitio.

En este caso estaríamos intentando encontrar la cantidad de subredes óptima para realizar la visita de los lugares deseados regresando cada día a un punto de origen. Todo esto sujeto a los días disponibles para realizar las visitas deseadas.

El problema anterior podría ser tratado en otro trabajo ya que además de los métodos revisados en este estudio, es necesario realizar un planteamiento distinto para agregar las nuevas condiciones.

Por ahora, es momento de disfrutar las vacaciones...



Figura 23.

1

2

3

4

5

6

7

## CAPÍTULO 4

# Redes y grafos en el análisis de sistemas susceptibles de corrupción

Por José Alfredo Cabrera Sánchez

## 4.1 Introducción

En la actualidad es común observar que existen una infinidad de conexiones entre objetos, sujetos y entidades, las cuales presentan una tendencia a formar redes complejas. De ahí que existen sistemas como la burocracia en la administración pública o, también, estructuras organizacionales en empresas del sector empresarial. Dicho esto, nos encontramos frente a un paradigma que propone la posibilidad de llevar a cabo un análisis mediante herramientas provenientes de la teoría de grafos y redes a estos sistemas.

Al reflexionar acerca de la posibilidad de conjuntar conocimiento generado en las ciencias sociales, así como de las ciencias matemáticas para estudiar la complejidad que dicta lo concerniente a las redes de corrupción, no es frecuente visualizar las relaciones existentes entre objetos, sujetos y entidades bajo la figura de una red compuesta por interacciones con sus propios esquemas o reglas, y que, al interior de estas, se formen coaliciones que son susceptibles de generar actos o delitos de corrupción.

Cabe destacar que, dentro de la gran diversidad que tienen las aplicaciones en lo que respecta a los grafos, es común observar la predomi-

1

2

3

4

5

6

7

nancia en el modelado de trayectorias de líneas de transporte en ciudades para obtener caminos óptimos para el trayecto al aplicar algoritmos como el de Floyd, o también el cálculo de rutas mediante el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto, entre otros.

De lo anterior, se ha observado que la teoría de grafos ocupa un lugar fundamental en el estudio de las ciencias sociales, específicamente en el análisis de las redes sociales, es decir, los nodos pueden ser representados gráficamente mediante actores o sujetos identificados y verificados dentro de una red. También, dentro de esa estructura puede identificarse a las aristas que funcionan como los vínculos o relaciones existentes, así como su dirección e intensidad.

## 4.2 Conceptos básicos

Un grafo  $G$  es un triple ordenado representado por  $(V(G), E(G), \varphi_G)$  que consiste en un conjunto no vacío  $V(G)$  de vértices, un conjunto  $E(G)$  disjunto de  $V(G)$  de aristas, y una función de incidencia  $\varphi_G$ , que asocia con cada arista de  $G$  un par desordenado de vértices (no necesariamente distintos) de  $G$ .  $\varphi_G(e) = uv$ , entonces se dice que  $e$  une a  $u$  y  $v$ , y los vértices  $u$  y  $v$  se denominan extremos de  $e$ .

Los grafos se representan de la siguiente manera:

$$G = (V(G), E(G), \varphi_G)$$

Dónde:

$$V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

Y:

$$\varphi_G(e_1) = v_1 v_2$$

$$\varphi_G(e_2) = v_2 v_3$$

$$\varphi_G(e_3) = v_3 v_3$$

$$\varphi_G(e_4) = v_3 v_4$$

$$\varphi_G(e_5) = v_2 v_4$$

$$\varphi_G(e_6) = v_4 v_5$$

$$\varphi_G(e_7) = v_2 v_5$$

$$\varphi_G(e_8) = v_2 v_5$$

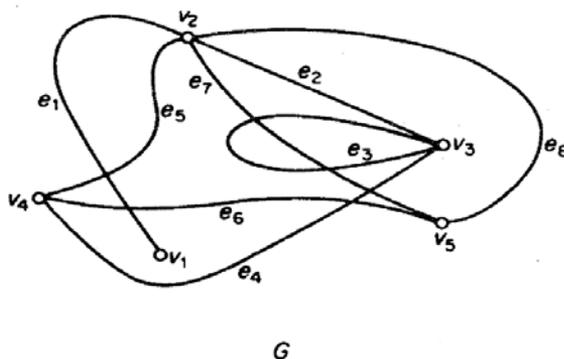


Figura 24. Extraída de Kay, Bondy & Murty (1977)

### 4.3 Aplicación

Un caso ampliamente estudiado concerniente a temas de corrupción mayor, de acuerdo con (Bayle 2020), es el escándalo internacional denominado "FIFA-Gate", el cual involucró fallas sistémicas de gobernabilidad a nivel mundial dentro de esa organización. Dicha problemática destapó graves incurrencias de corrupción a distintas áreas y en diferentes niveles respecto al manejo de contratos o proyectos, así como del manejo del

1

2

3

4

5

6

7

dinero proveniente de patrocinadores hacia las confederaciones o áreas administrativas regionales. En el mismo se realizó un análisis a las redes de la organización.

Por otro lado, Ferrali (2020) propone un caso práctico: puede partir de un enfoque de redes de corrupción que nos explica cómo se forman las redes de corrupción y cómo esto depende de la estructura de la organización donde ocurre la corrupción. Asimismo, se cuestiona la interrogante acerca de qué tan grandes pueden ser las redes de corrupción y cómo es que la corrupción afecta a las organizaciones. Para ello se ejemplifica mediante un modelo experimental que se enfoca en las coaliciones que se pueden formar en la red.

Ahora bien, en un contexto gubernamental al comenzar la nueva administración se realizó un análisis como auditor interno de una entidad. Se esquematizó mediante grafos la red que se forma en la burocracia. Posteriormente, al identificar el objeto de la investigación se logró seleccionar los actores o sujetos y las relaciones involucradas en la red, es decir, los vértices, las aristas y los vínculos establecidos.

Para ejemplificar lo anterior, el objeto de análisis fue el conocer cuál es el manejo de los recursos públicos que son ejecutados para satisfacer las necesidades por parte del gobierno que son expresadas por proyectos o servicios y que quedan plasmadas a través de contratos con diversas personas físicas o morales.

A partir de información pública de contratos establecidos como de información interna, así como del detalle de los datos disponibles, se conformaron los vértices que representan a los sujetos o actores gubernamentales y las personas físicas o morales que participan de los contratos. Asimismo, se representaron los vínculos existentes y etiquetaron las aristas como el flujo tanto de recursos financieros como del número de contratos que fueron sido asignados.

1

2

3

4

5

6

7

Cabe destacar que esta representación gráfica de la red concerniente a los contratos y recursos ejercidos como se ejemplifica en la figura 25, puede iniciar desde un nivel de detalle bajo hasta uno de nivel alto. Todo depende de la cantidad de información disponible y la complejidad de la red, así como los objetivos por analizar.

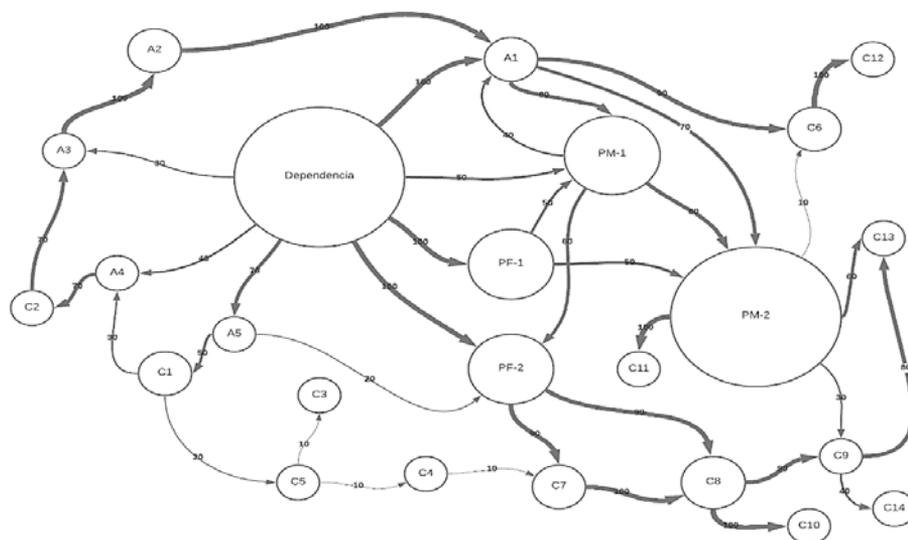


Figura 25. Ejemplo: Dependencia, Persona Moral, Persona Física, Contratista, Área

De lo anterior, se pueden realizar diversos análisis acerca de cómo es la interacción entre sujetos y actores al buscar posibles actos de corrupción o ser beneficiados de manera recurrente por tráfico de influencias o al incumplir la inhabilitación de sanciones administrativas; el flujo financiero y de contratos asignados y ejecutados para evaluar los montos y la concentración de los recursos, así como el origen y destino de estos.

También, en un caso específico cómo en la asignación de contratos relacionados para la compra y distribución de medicamentos en el sector salud, se puede realizar un análisis de la red mediante el corte mínimo

para evaluar si los actores y sujetos relacionados están confluyendo de manera óptima o si se deben colocar más controles en la asignación de estos. Además, un análisis del flujo máximo entre los canales de proveedores y las entidades finales. No obstante realizar un análisis de la ruta más corta en la distribución.

Se puede concluir que, a diferencia de otras formas de actividades delictivas organizadas, la corrupción se produce dentro de organizaciones que dotan a sus miembros de colegas que pueden ser potenciales, cómplices o testigos, por ello, un análisis integral de la red que puede encontrarse al interior de las organizaciones puede generar conocimientos para prevenir y atacar los puntos sensibles.

Cabe destacar que este tipo de análisis tiene como objetivo transparentar y mostrar cómo son los vínculos e interacciones entre sujetos para lograr una mayor eficiencia y optimizar la operación de la red. Por lo anterior, se tiene que tomar en cuenta que son millones de registros que se pueden encontrar de cambios y modificaciones de diversos contratos. Por lo que se puede obtener una imagen estática, pero también dinámica del comportamiento del sistema.

1

2

3

4

5

6

7

## CAPÍTULO 5

# Ruta más corta de línea 3 de metro a Edificio T

Por Juan Pablo Cisneros Castañeda

## 5.1 Introducción

Por naturaleza, cuando el ser humano tiene un traslado del punto  $A$  al punto  $B$  normalmente lo busca recorrer en la menor distancia o tardar el menor tiempo posible. En la actualidad, usamos aplicaciones de celular para nuestros traslados cotidianos con el objetivo de optimizar nuestro tiempo.

Estas aplicaciones siempre tienen una justificación matemática, que es soportada por la teoría de redes en la investigación de operaciones. A continuación, se define formalmente el problema de la ruta más corta y se muestra un caso de aplicación para los traslados de los alumnos del posgrado de Ingeniería que vienen del metro.

## 5.2 Ruta más corta

Este problema se ha definido en la literatura como el problema de la ruta más corta en la teoría de redes. De manera formal Hillier y Lieberman lo definen de la siguiente manera: *“Considera una red conexa y no dirigida con dos nodos especiales llamados origen y destino. A cada una de las ligaduras (arcos no dirigidos) se asocia una distancia no negativa. El objetivo es encontrar la ruta más corta (la trayectoria con la mínima distancia total) que va del origen al destino.”*

1

2

3

4

5

6

7

### 5.3 Problemática

Una gran parte del alumnado de posgrado en Ingeniería son usuarios del Sistema de Transporte Colectivo Metro. Es a través de este mismo como nos trasladamos para tomar clases hacia el edificio T *Bernardo Quintana Arrijoja* del Anexo de Ingeniería de Ciudad Universitaria. Al venir por la línea 3 de metro pareciera que las posibilidades son gigantescas, ¿bajar en la estación Copilco o en Universidad?, ¿llegar caminando, tomar el Pumabús o usar la Bicipuma? Estas y otras decisiones son las que se presentan todos los días para acceder hacia este edificio.

### 5.4 Metodología

Se determina el nodo inicial de la red en la estación de Copilco ya que ahí inicia la bifurcación de decisiones: bajar en Copilco o permanecer en el metro y bajar en la estación Universidad. Para simplificar el problema e ilustrar su resolución se reducen las rutas posibles a 4:

1. Bajar en Copilco y llegar caminando al edificio T pasando por la Facultad de Medicina, la Facultad de Química y el invernadero Faustino Miranda.
2. Bajar en Copilco, caminar hacia la Facultad de Medicina, tomar la Bicipuma en estación Medicina, dejar la Bicipuma en estación Anexo de Ingeniería y caminar hacia el edificio T.
3. Bajar en Universidad, tomar la Bicipuma en BiciCentro, dejar la Bicipuma en estación Anexo de Ingeniería y caminar hacia el edificio T.
4. Bajar en Universidad, tomar la línea 3 del Pumabús en la base Universidad, bajar en la parada de Facultad de Química y caminar por el invernadero hacia el edificio T.

1

2

3

4

5

6

7

Teniendo estas rutas se construyó una red para representarlas de manera gráfica. Los tiempos fueron determinados a través de experimentación y su respectiva documentación, estos podrían estar sesgados por ser una muestra pequeña, pero en términos generales representan la realidad dentro de los traslados mencionados. La red con las 4 rutas, los tiempos de los traslados en minutos y los medios de transporte se puede observar en la siguiente figura:

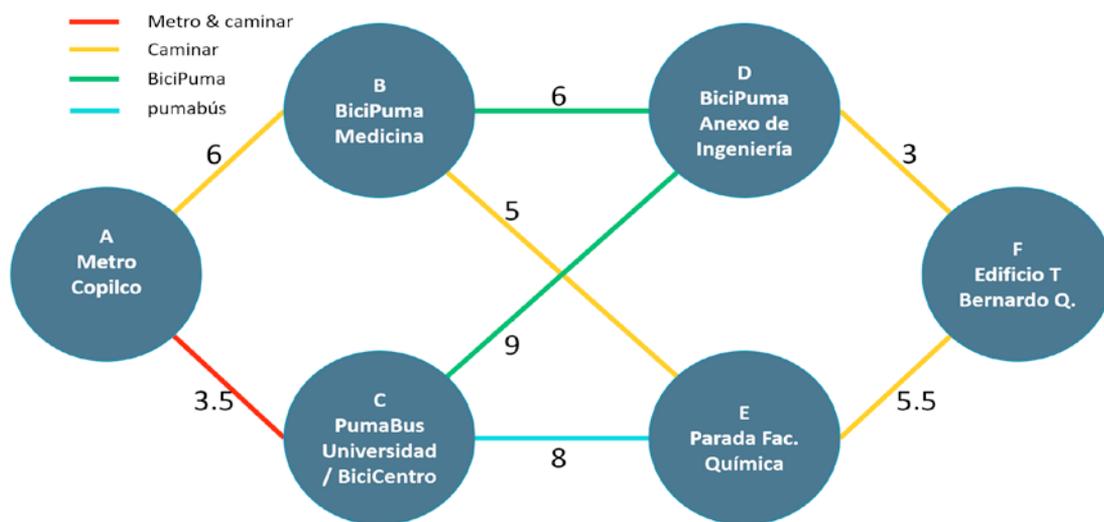


Figura 26. Red con las rutas posibles desde estación Metro Copilco hacia edificio T Bernardo Q., con tiempos de traslados en minutos

Aunque en este caso de dimensión pequeña se podría determinar la ruta óptima a través de búsqueda exhaustiva, es decir, probar todas las rutas y obtener la mejor; se ejemplifica la resolución de este problema con dos métodos: programación dinámica y el Algoritmo de Dijkstra. Estos métodos acortan el tiempo de búsqueda en instancias de mayor dimensión.

Para la resolución del problema con los dos métodos se usará la nomenclatura mostrada en el diagrama. Así pues, se buscará la ruta más corta desde A hacia F.

### 5.5 Resolución Programación dinámica

El método de resolución de programación dinámica se utiliza en los problemas en los que se puedan establecer etapas, así como una función recursiva que se aplica en cada etapa. En este caso se definen 3 etapas en la red, cada una representa una decisión de arco a tomar. Se establece la función recursiva desde la etapa 1 hasta la 3 como el tiempo mínimo del arco actual más el tiempo del siguiente nodo.

#### Etapa 1

$$S_A = \min \begin{cases} 6+S_B \\ 4+S_C \end{cases}$$

#### Etapa 2

$$S_B = \min \begin{cases} 6+S_D \\ 5+S_E \end{cases}$$

$$S_C = \min \begin{cases} 9+S_B \\ 8+S_E \end{cases}$$

#### Etapa 3

$$S_D = 3 + S_F$$

$$S_E = 5.5 + S_F$$

Posteriormente, se obtiene que la función recursiva estando posicionados en F es igual a 0, por tanto, ahora se va hacia atrás sustituyendo en las funciones ya establecidas para determinar el tiempo mínimo.

1

2

3

4

5

6

7

$$S_F = 0$$

### Etapa 3

$$S_D = 3 + 0 = 3$$

$$S_E = 5.5 + 0 = 5.5$$

### Etapa 2

$$S_B = \min \begin{cases} 6 + 3 = 9 \\ 5 + 5.5 = 10.5 \end{cases}$$

$$S_C = \min \begin{cases} 9 + 3 = 12 \\ 8 + 5.5 = 13.5 \end{cases}$$

### Etapa 1

$$S_A = \min \begin{cases} 6 + 9 = 15 \\ 3.5 + 12 = 15.5 \end{cases}$$

**Ruta más corta**  $A \rightarrow F: A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$

Al recuperar la ruta más corta se obtiene que la ruta que baja de metro en Copilco toma la Bicipuma en estación Medicina y llega a la estación Bicipuma Anexo de Ingeniería será la más corta con 15 minutos.

## 5.6 Resolución algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra encuentra el camino más corto desde un nodo fuente S hacia cualquier otro nodo. Este método exacto se caracteriza por la asignación de etiquetas temporales y permanentes. Su pseudocódigo se puede ver a continuación:

1

2

3

4

5

6

7

```

algorithm Dijkstra;
begin
   $S := \emptyset; \bar{S} := N;$ 
   $d(i) := \infty$  for each node  $i \in N;$ 
   $d(s) := 0$  and  $\text{pred}(s) := 0;$ 
  while  $|S| < n$  do
    begin
      let  $i \in \bar{S}$  be a node for which  $d(i) = \min\{d(j) : j \in \bar{S}\};$ 
       $S := S \cup \{i\};$ 
       $\bar{S} := \bar{S} - \{i\};$ 
      for each  $(i, j) \in A(i)$  do
        if  $d(j) > d(i) + c_{ij}$  then  $d(j) := d(i) + c_{ij}$  and  $\text{pred}(j) := i;$ 
    end;
  end;

```

Figura 27. Pseudocódigo del algoritmo de Dijkstra, Ahuja R. et al. (1993)

## Inicialización

### Paso 1

$$d_A = 0$$

$$d_B = d_C = d_E = d_F = \infty$$

### Paso 2

$$\Gamma^+(p) = \{B, C\}$$

$$d_B = \min \{ \infty, 0 + 6 \} = 6, \quad a_B = A$$

$$d_C = \min \{ \infty, 0 + 3.5 \} = 3.5, \quad a_C = A$$

### Paso 3

$$d_C = 3.5, C \rightarrow \text{permanente}$$

1

2

3

4

5

6

7

**Iteración 1****Paso 2**

$$\Gamma^+(p) = \{D, E\}$$

$$d_D = \min \{\infty, 3.5 + 9\} = 12.5, \quad a_D = C$$

$$d_E = \min \{\infty, 3.5 + 8\} = 11.5, \quad a_E = C$$

**Paso 3**

$$d_B = 6, B \rightarrow \text{permanente}$$

**Iteración 2****Paso 2**

$$\Gamma^+(p) = \{D, E\}$$

$$d_D = \min \{12.5, 6 + 6\} = 12, \quad a_D = B$$

$$d_E = \min \{11.5, 6 + 5\} = 11, \quad a_E = B$$

**Paso 3**

$$d_E = 11, E \rightarrow \text{permanente}$$

**Iteración 3****Paso 2**

$$\Gamma^+(p) = \{F\}$$

$$d_F = \min \{\infty, 11, + 5.5\} = 16.5, \quad a_F = E$$

**Paso 3**

$$d_D = 12, D \rightarrow \text{permanente}$$

1

2

3

4

5

6

7

**Iteración 4****Paso 2**

$$\Gamma^+(p) = \{F\}$$

$$d_F = \min \{16.5, 12 + 3\} = 15, \quad a_F = D$$

**Paso 3**

$$d_F = 15, F \rightarrow \text{permanente}$$

**FIN**

$$d_F = 15, \text{RMC} = A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$$

Tras recuperar la ruta obtenida por el algoritmo de Dijkstra comprobamos que tomar la Bicipuma en estación Medicina será la ruta óptima y tardará 15 minutos, se puede observar la ruta óptima en el siguiente mapa:



Figura 28. Ruta más corta desde línea 3 hacia edificio T

1

2

3

4

5

6

7

## 5.7 Conclusiones y recomendaciones

En este caso de aplicación se resuelve el problema de la ruta más corta y la resolución se comprueba tanto por el método de programación dinámica como por el algoritmo de Dijkstra, obteniendo 15 minutos desde la estación Copilco hasta el edificio T.

Estos son algunos de los métodos de resolución existentes, otras referencias para resolver este problema se podrían encontrar en los algoritmos de búsqueda en profundidad, búsqueda en amplitud, búsqueda bidireccional, algoritmo Bellman-Ford, entre otros. Es dependiendo de la instancia donde se determinaría el método que se acopla mejor al problema, es decir, que lo resuelve en el menor tiempo o número de operaciones.

El problema de la ruta más corta es esencial en la teoría de redes y es aplicable a casos complejos en la industria, como el ruteo óptimo de vehículos y definición de layout de plantas; así también, puede ser aplicado a casos de redes sociales como los grados de separación entre usuarios.

1

2

3

4

5

6

7

## CAPÍTULO 6

# Abastecimiento de plataformas petroleras en el golfo de México (Vía marina)

Por Johans Francisco Luna Pérez

## 6.1 Introducción

Con el desarrollo de la explotación de los hidrocarburos en zonas marinas surge una gran variedad de retos logísticos, desde la misma instalación de las plataformas petroleras hasta el continuo abastecimiento de estas. Para el año 2019, la fuerza laboral de PEMEX fue de 122,646 personas, de las cuales el 72% lleva a cabo sus actividades en la Sonda de Campeche. Para llegar a las plataformas petroleras se tienen dos vías: la marítima se realiza por medio de barcos tipo Ferry y la vía aérea se realiza por medio de helicópteros.

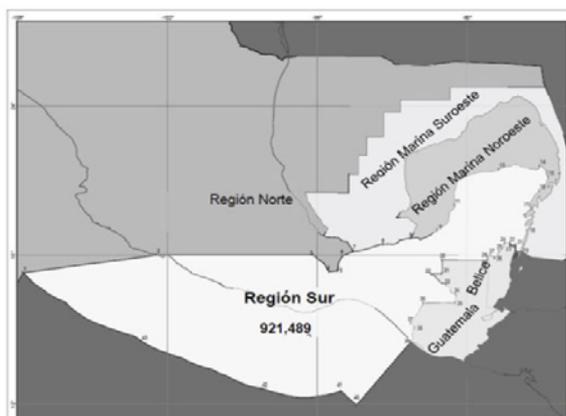


Figura 29. Sonda de Campeche

1

2

3

4

5

6

7

El abastecimiento de las plataformas normalmente se realiza por medio de barcos de suministros; existen casos especiales en los que la urgencia exige utilizar vías más rápidas como la aérea que es a través de helicópteros. Dentro de los procesos logísticos se considera el abastecimiento de las herramientas, equipos, consumibles y materiales requeridos para la operación y por otra parte, se considera también el suministro de los insumos necesarios para el personal que se encuentra en las plataformas, por ejemplo:

- Agua purificada
- Alimentos
- Artículos de limpieza

Entre otros equipos y herramientas que son ajenas a la operación pero de igual importancia. Es importante contextualizar que es el operador de la plataforma petrolera quien define la planeación para efectuar el suministro, así como de la duración de las guardias siendo el tiempo más común el de 14 días; aunque con el Covid19, las guardias de algunas compañías se llegaron a extender hasta los 56 días originando nuevos retos aunados a los que ya se tenían.

## 6.2 Problemática

La Sonda de Campeche está conformada por un gran número de plataformas marinas, en las que se puede encontrar personal de compañías operadoras como PEMEX, Shell, CNOOC, Fieldwood, etc. Y personal de compañías prestadoras de servicios como lo son Baker & Huges, Schlumberger, Halliburton, COSL, etc. Para este caso de aplicación, se analizará Petroleos Mexicanos.

Como ya se mencionó anteriormente, el 72% de la nómina de PEMEX lleva a cabo sus actividades costa fuera y debe suministrar los insumos

alimenticios y de limpieza a diferentes plataformas; se han asignado las siguientes a un departamento de logística:

Unidad	Siglas	Coordenadas	
		Latitud Norte	Longitud oeste
Apto CME	CME	18°39'08"N	91°48'04"W
Apto VSA	VSA	17°59'41"N	92°49'01"W
Plataforma	AAA	19°17'48".49N	92°10'09".47W
Plataforma	KBH	19°26'46".04N	92°01'59".80W
Plataforma	KGH	19°23'00".14N	92°03'01".22W
Plataforma	KLH	19°26'51".68N	92°05'01".63W
Plataforma	NAH	19°21'57".38N	92°00'11".36W
Plataforma	IYA	19°15'42".50N	92°12'24".60W
Plataforma	KUA	19°31'13".72N	92°11'08".32W

La principal problemática se centra en la manera de abastecer, que tiende a despachar una plataforma y volver a puerto para recargar y regresar a la sonda para abastecer y así sucesivamente, recorriendo muchos kilómetros que implican tiempo y consumo de combustible. Con el objetivo de maximizar el aprovechamiento del barco abastecedor se buscará la mejor ruta para cumplir con las entregas en todas las plataformas, reduciendo de esta manera el consumo de gasolina del barco y disminuir el tiempo que lleva la operación. Para ello se utilizará el método de "el problema del agente viajero" que se ha utilizado en el capítulo 3 con otro fin.

1

2

3

4

5

6

7

### 6.3 Solución del problema con TSP

Se cuenta con las coordenadas de las plataformas y se encuentran ubicadas geográficamente como se muestra a continuación:

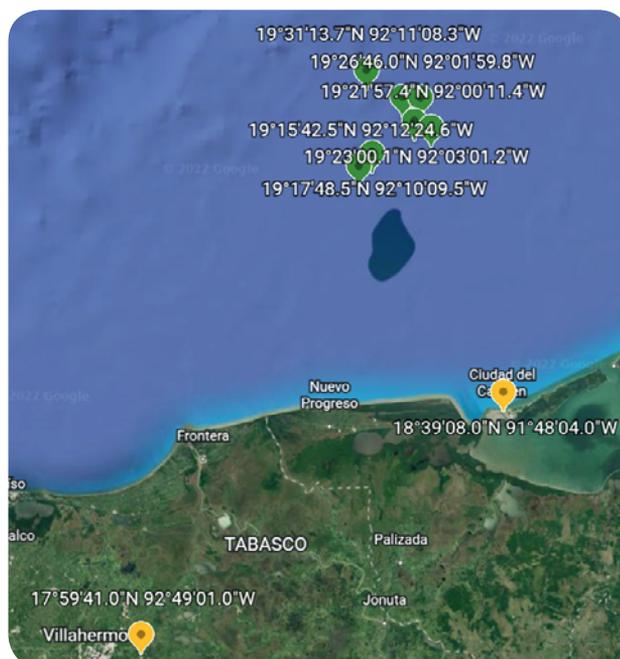


Figura 30. Ubicación geográfica de plataformas marinas

Las plataformas se pueden apreciar en los indicadores verdes y los centros en donde inicia el proceso de reabastecimiento en amarillo; es claro que reabastecer desde la ciudad de Villahermosa, Tabasco significaría una mayor distancia, por lo cual, no se tomará en consideración para el desarrollo del método.

Posteriormente se realiza la medición de las distancias de todos los puntos y se define la red para mayor claridad.

1

2

3

4

5

6

7

Distancias		
Nodo 1	Nodo 2	Distancia (KM)
CME	AAA	81.21
CME	KBH	91.4
CME	KGH	85.23
CME	KLH	93.25
CME	NAH	82
CME	IYA	80
CME	KUA	104.38
AAA	KBH	22
AAA	KGH	15.76
AAA	KLH	19.06
AAA	NAH	19.03
AAA	IYA	5.26
AAA	KUA	25.07
KBH	KGH	7.15
KBH	KLH	5.1
KBH	NAH	9.3
KBH	IYA	27.29
KBH	KUA	18.12
KGH	KLH	8.03
KGH	NAH	4.9
KGH	IYA	20.9
KGH	KUA	20.92
KLH	NAH	12.4
KLH	IYA	23.97
KLH	KUA	13.45
NAH	IYA	24.08
NAH	KUA	25.86
IYA	KUA	28.63

Unidad	Siglas	Grafo	Software
Apto CME	CME	A	1
Apto VSA	VSA	B	
Plataforma	AAA	C	2
Plataforma	KBH	D	3
Plataforma	KGH	E	4
Plataforma	KLH	F	5
Plataforma	NAH	G	6
Plataforma	IYA	H	7
Plataforma	KUA	I	8

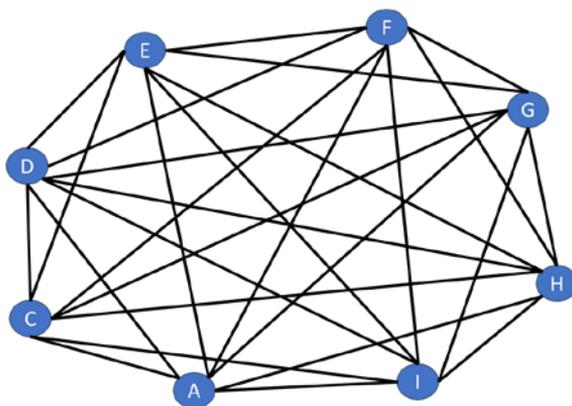


Figura 31. Distancias y representación gráfica

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Una vez definidos los arcos y sus distancias con todas las rutas posibles que podría tomar el barco abastecedor para recorrer todos los nodos con la menor distancia posible y volver a puerto, se procede a alimentar el software con la información recabada. Al ser la red una representación gráfica en la que todos los nodos están conectados se hallará simetría en el llenado del software.

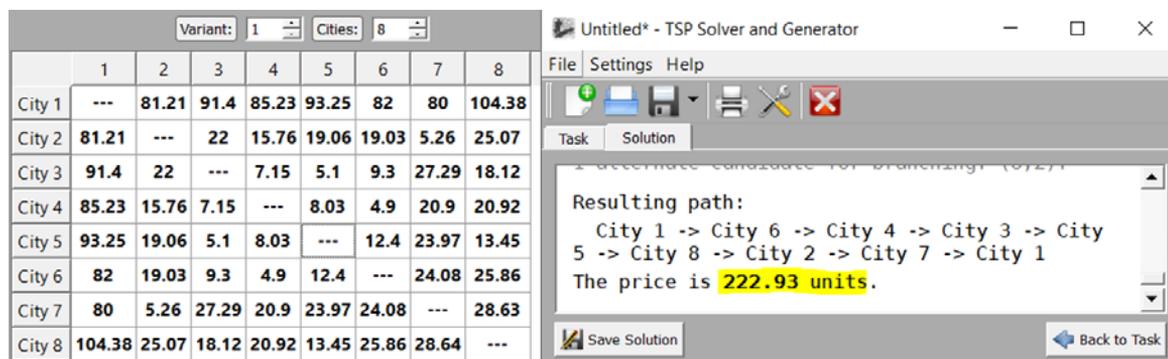


Figura 32. TSP Solver.

## 6.4 Conclusiones

El recorrido óptimo para abastecer todas las plataformas que corresponden a este departamento de logística sería de la siguiente manera:

**A→G→E→D→F→I→C→H→A = 222.93 KM Partiendo del Puerto de Ciudad del Carmen.**

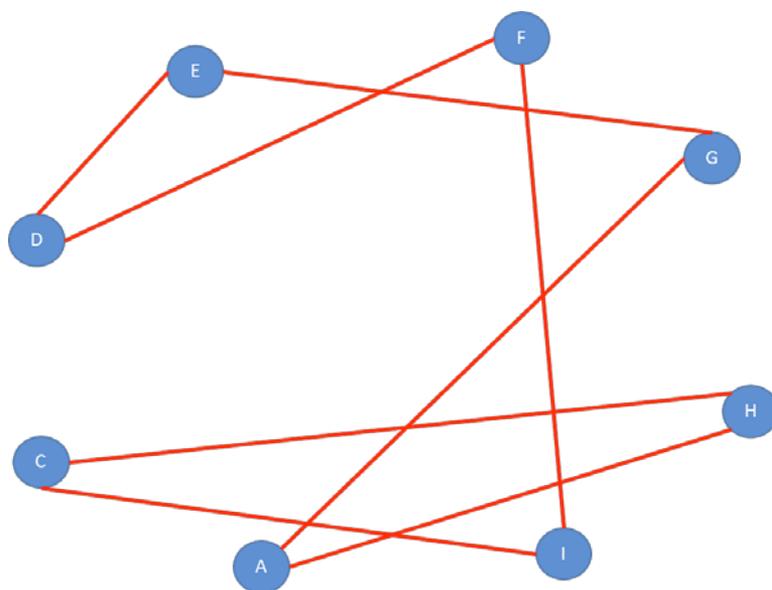


Figura 33. Ruta más corta

Es muy importante considerar que este recorrido será efectivo si el barco parte con todos los insumos necesarios para todos los nodos, ya que si llegase a faltar algo deberá irremediablemente regresar a puerto para recargar y continuar su recorrido, lo cual es común y no necesariamente por descuidos sino por tiempos de entrega de los proveedores.

En el siguiente Link se puede apreciar el recorrido geográficamente:  
[https://youtu.be/ucHXWqHik\\_A](https://youtu.be/ucHXWqHik_A)

## Capítulo 7

# Diseño e integración de sistemas de redes de riego

Por Seleni Lucía Lara Jáuregui

## 7.1 Introducción

El riego es la parte más imprescindible para el crecimiento y desarrollo de un cultivo. Sin embargo, el agua es un recurso limitado. A pesar de que la mayoría de nuestro planeta está cubierto de agua; menos del 3% es agua dulce, y el sector agrícola consume un 70% de esta agua. En la agricultura, los sistemas de riego ofrecen una serie de ventajas que posibilitan racionalizar el agua disponible. Cualquier sistema de riego debe someterse a un estudio previo para determinar si es el más idóneo, tomando en consideración desde el tipo de vegetación, el tipo de riego por implementar y hasta la forma de distribuir las redes de agua para obtener el mejor rendimiento.

En cuanto a los sistemas de regadío de países en vía de desarrollo, se observa que cerca del 65% del agua se pierde debido a las redes de los sistemas de riego ineficientes. Esto se debe a la falta de información de la cantidad de agua que requiere el cultivo, mal estado y conservación de las redes de conducción, y a la mala distribución de estas redes.

Además, se espera que la competencia por los recursos hídricos aumente en un futuro, poniendo especial presión sobre la agricultura, debido al aumento de la población, la urbanización, la industrialización y cam-

1

2

3

4

5

6

7

bios climáticos. Para precisar una mejora de la eficiencia en el uso del agua, será necesario realizar cambios importantes en las asignaciones de agua en los diversos sectores y cambios en los sistemas de redes de riego. Por esta razón, el diseñar e integrar sistemas de riego beneficia a infinidad de productores y agricultores. Aumentar la eficiencia del agua permite que se ahorre el mismo recurso, y se mejoren los rendimientos finales.

Es por ello, que mediante el uso de una estructura de árbol de expansión mínima se busca diseñar un sistema de red de riego eficiente logrando minimizar los costos de implementación y mantenimiento. Pues una buena gestión del manejo del agua es fundamental para los procesos agrícolas permitiendo de esta manera ahorrar agua en la agricultura.

## 7.2 Definiciones

Una red se dice árbol si es conectada y sin circuitos (figura 34). Se excluyen aquellas redes que constan de un solo nodo.

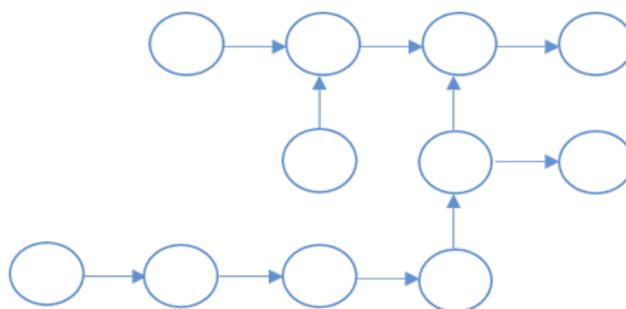


Figura 34. Ejemplo de un árbol

Un conjunto de arcos  $F \subset A$  se dice que forma un bosque en una red  $G$ , si cada componente de la subred compuesta por arcos de  $F$  y los nodos

incidentes a ella es un árbol (figura 35). En otras palabras,  $F$  es un bosque si y solo si no se incluyen circuitos elementales en  $F$ .

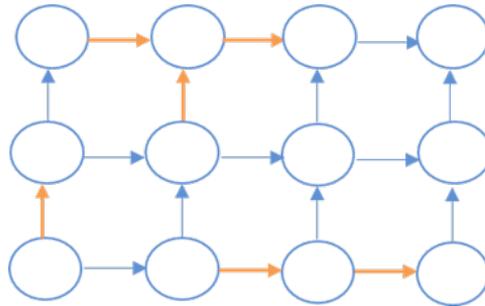


Figura 35. Ejemplo de un bosque

Un bosque máximo en  $G$  se define como un bosque que no está estrictamente contenido en otro bosque  $G$ .

Un árbol de expansión de  $G$  es un árbol que pasa por cada nodo de  $G$ , como en la figura 36.

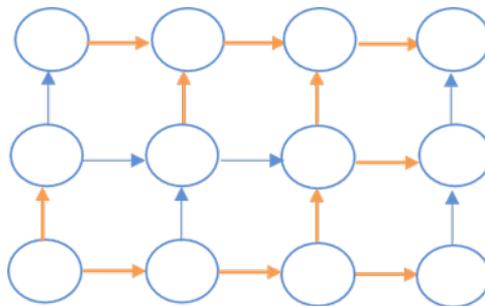


Figura 36. Ejemplo de un árbol de expansión

Las características que debe de cumplir un árbol son las siguientes:

**Teorema 1**

Un árbol es una red (o gráfica) caracterizada por cualquiera de los siguientes postulados:

- Conectada y sin circuitos
- Existe una trayectoria única entre cada par de nodos
- No tiene circuitos, pero exactamente uno se forma al añadir un arco
- Es conectada, pero deja de serlo si algún arco se elimina

**Teorema 2. Teorema de expansión**

Para cualquier red  $G$ , las siguientes propiedades de un conjunto de arcos  $F \subset A$  son equivalentes:

- $F$  forma un bosque máximo para  $G$
- $F$  forma un árbol de expansión para cada componente de  $G$  que no sea un no único
- $F$  forma un bosque tal que  $|F| = |N| - p$ ; donde  $p$  es un número de componentes de  $G$
- Las columnas  $e_j$  de la matriz de incidencia  $E$  correspondiente a los arcos  $j \in F$  forman una base para el espacio de las columnas de  $E$

**7.3 Árbol de expansión mínima**

El problema de árbol de expansión mínima juega un papel importante en los problemas de redes de flujo. Para resolver el problema de ruta más corta se necesita construir un árbol con raíz y para resolver redes a costo mínimo se usan árboles para encontrar la solución.

Una característica especial de los problemas de árbol de expansión mínima es que los arcos no son dirigidos  $(i,j)$  o  $(j,i)$  se refieren al mismo arco.

Dada una red  $G = (N, A)$  no dirigida con  $n = |N|$  nodos y  $m = |A|$  arcos con costos o longitudes  $c_{ij}$  asociados a cada arco  $(i, j) \in A$ , se desea encontrar un árbol de expansión, llamado el árbol de expansión mínima, que tenga el menor costo (o longitud) de los arcos que lo constituyen, medido como la suma de los costos de los arcos.

En la figura 37 se muestra la diferencia entre red no dirigida, árbol de expansión y árbol de expansión mínima:

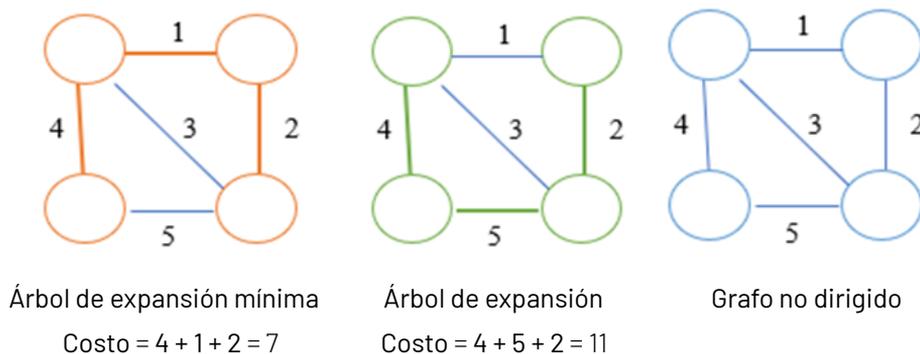


Figura 37. Red no dirigida, árbol de expansión y árbol de expansión mínima

Los algoritmos para resolver el problema de árbol de expansión mínima son de la característica del tipo "glotón", en el sentido de que en cada paso aumentan un arco de costo mínimo como candidato de la lista, siempre y cuando este arco no forme ningún circuito con los arcos ya seleccionados. Estos algoritmos mantienen un bosque que contiene arcos que ya han sido seleccionados y se aumentan uno o más arcos para aumentar el tamaño del bosque. Los algoritmos son:

- Algoritmo de Kruskal
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Sollin

## 7.4. Aplicación en el diseño de sistemas de redes de riego

Para el caso práctico del diseño de sistemas de redes de riego, se tiene dos tipos de sistemas de redes. El primero que es el sistema de riego propio del cultivo, el cual debe de contar con tuberías (arcos) que rieguen a cada planta (nodos).

El objetivo es instalar a menor costo el sistema de regadío para el cultivo, teniendo en cuenta que, a menor distancia, menor será el costo de instalación.

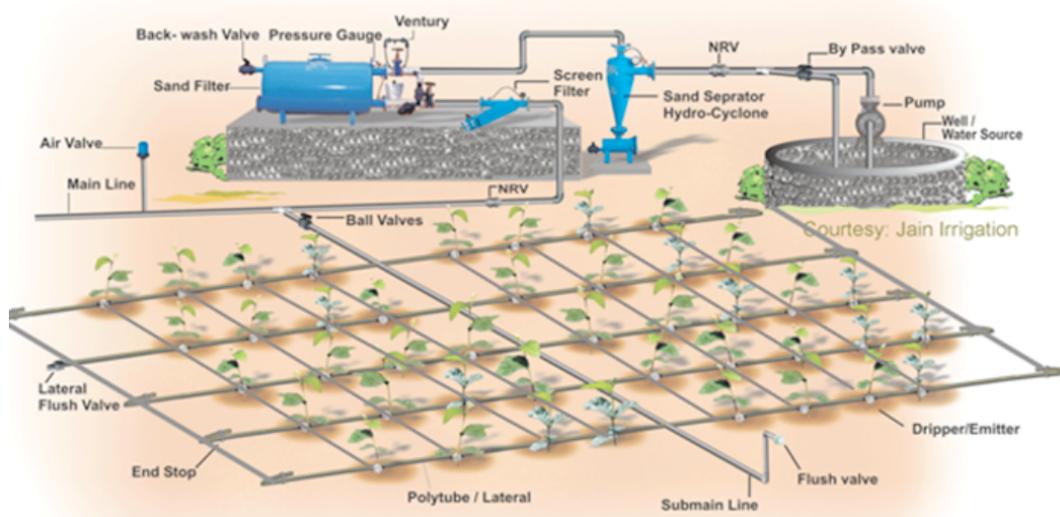


Figura 38. Sistema de riego extendido para cultivo

Graficando el sistema de la figura 38, se tendría el siguiente grafo; el cual tiene una distancia de tubería igual a: 112 metros de tuberías.

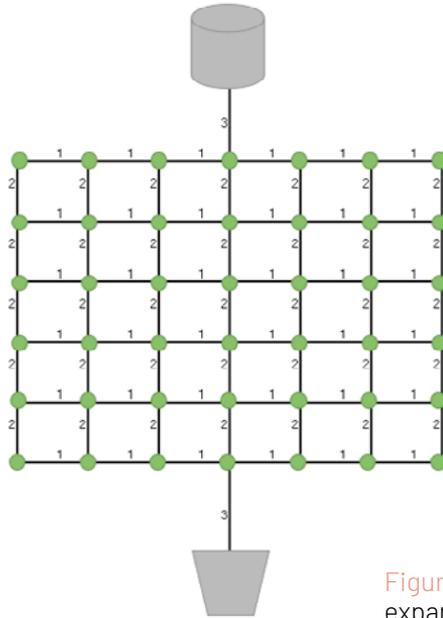


Figura 39. Grafo del árbol de expansión del cultivo

Sin embargo, utilizando los algoritmos del árbol de expansión mínima, se podría reducir la distancia a 52 metros de tubería; ahorrando un 54% en costos de tubería.

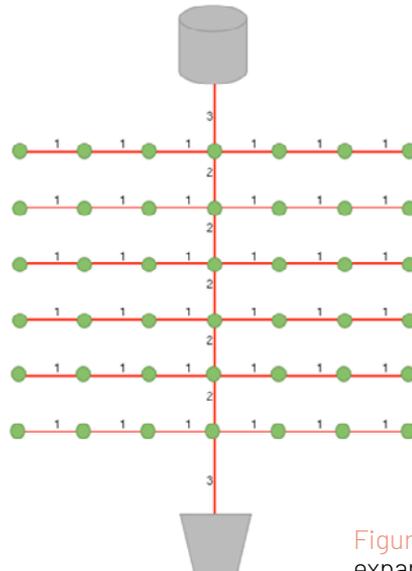


Figura 40. Grafo del árbol de expansión mínima del cultivo

Cabe recalcar que cada cultivo tendrá su propia configuración y diseño de sistema de riego.

### 7.5. Integración de los sistemas de redes de riego

Para la integración de los sistemas de redes de riego se toma en cuenta el área del terreno y los distintos cultivos que se pueden producir, siendo los cultivos los nodos por abastecer del sistema de redes de riego y las distancias entre cultivos los arcos. De mantener la integración según la figura 41, se necesitarían 6000 m de tuberías para el sistema de riego.

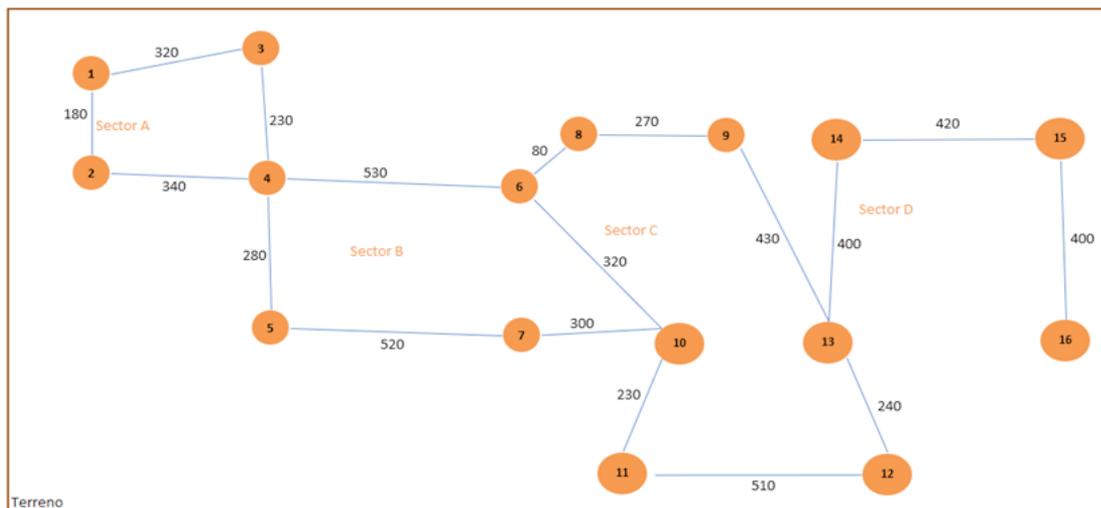


Figura 41. Grafo del árbol de expansión del terreno

Sin embargo, utilizando los algoritmos del árbol de expansión mínima (figura 42), se podrá reducir la distancia a 4,620 metros de tubería en el terreno; ahorrando un 33% en costos de tubería.

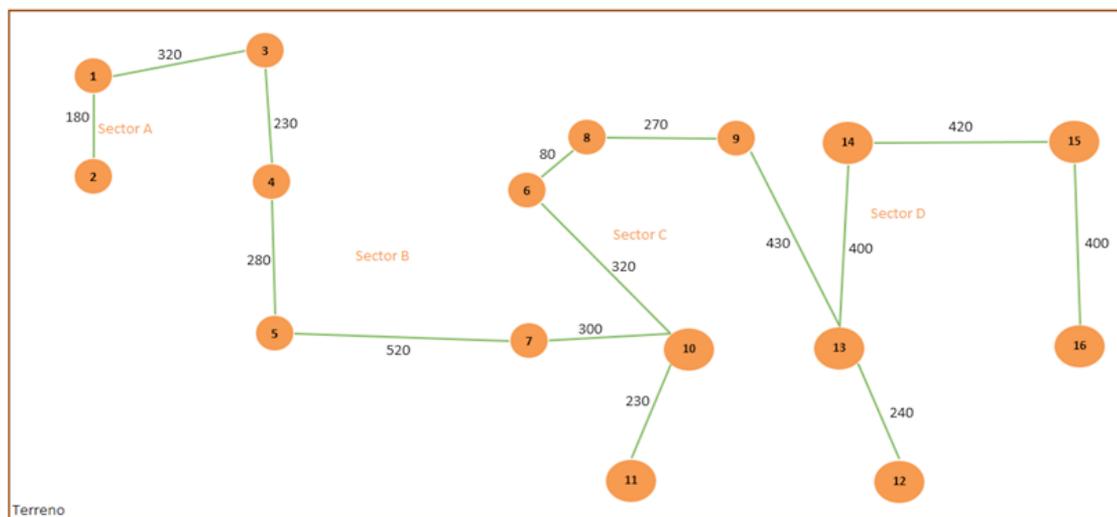


Figura 42. Grafo del árbol de expansión mínima del terreno

## 7.6. Conclusiones

Se ha comprobado que la forma de regar los cultivos puede generar mejores cosechas y mayores ingresos, sabiendo que el vital líquido es un recurso cada vez más escaso, del cual hay que hacer el mejor uso posible.

Cada día es mayor el número de productores que toman conciencia sobre la importancia que tiene los sistemas de redes de riego en sus cultivos.

La elección de un sistema de riego adecuado tiene profundos efectos ambientales, productivos y económicos. Los sistemas de redes de riego deben ser complementarios al terreno, al tipo de plantas y a los objetivos del cultivo. Con el fin de minimizar el consumo de agua y minimizar los costos de implementación y mantenimiento, se debe hacer un adecuado diseño de estos sistemas.

Mediante el uso de los algoritmos árbol de expansión mínima fue posible generar ahorros significativos en la implementación y mantenimiento de las redes de riego.

## REFERENCIAS

Ahuja, R., Magnanti, T. & Orlin, J. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall.

Banco Mundial. (2021). *El agua en la agricultura*.

Bayle, E. (2015). "FIFA-gate": an opportunity to clean up international sports governance. *Soccer and Society*, 21(5), 622-623.

Bertsekas, D. (1998). *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*. U.S.A.: Athena Scientific, Belmont, Massachusetts. Pp. 52-114.

Ferrali, R. (2020). Partners in crime? Corruption as a criminal network. *Games and Economic Behavior*, 124, 319-353.

Glover, F., Klingman, D. & Phillips, N. (1992). *Network Models in Optimization and Their Applications in Practice*. John Wiley & Sons, Inc.

Hillier, F. & Lieberman, G. (1997). *Introducción a la Investigación de Operaciones* (6.ª ed.). McGraw Hill.

Hong, I., Kuby, M. & Murray, A. (2018). A range-restricted recharging station coverage model for drone delivery service planning. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 90, 198-212. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.02.017>.

- IAGUA. (2021). *El regadío en Perú*.
- Kay, E., Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. (1997). Graph Theory with Applications. *Operational Research Quarterly (1970-1977)*, 28(1), 237.
- PEMEX. (2020). *Anuario Estadístico 2019*. Ciudad de México: PEMEX.
- Pop, P. (2012). *Generalized Network Design Problems: Modeling and Optimization*. De Gruyter.
- Riego Smart Solutions. (2020). *Sistemas de riego: Diseño e instalación de sistemas de riego para hogares, desarrollos urbanos o corporativos*.
- Rodríguez, H. (2020). *Instalación de riego*. Sevilla.
- Velázquez, A. (2017). *El mundo de los drones*. Cienciorama - UNAM. Recuperado 21 de junio de 2021, de [http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/538\\_cienciorama.pdf](http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/538_cienciorama.pdf)
- Yang, G. & Nikolova, E. (2016). *Approximation Algorithms for Route Planning with Nonlinear Objectives*. Proceedings of the Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-16).

1

2

3

4

5

6

7



***Aplicaciones de teoría de redes***

se publicó digitalmente en el repositorio de la Facultad de Ingeniería en Febrero de 2024.

Primera edición electrónica de un ejemplar (11 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Barlow para textos y Roboto Slab para títulos con sus respectivas variantes.