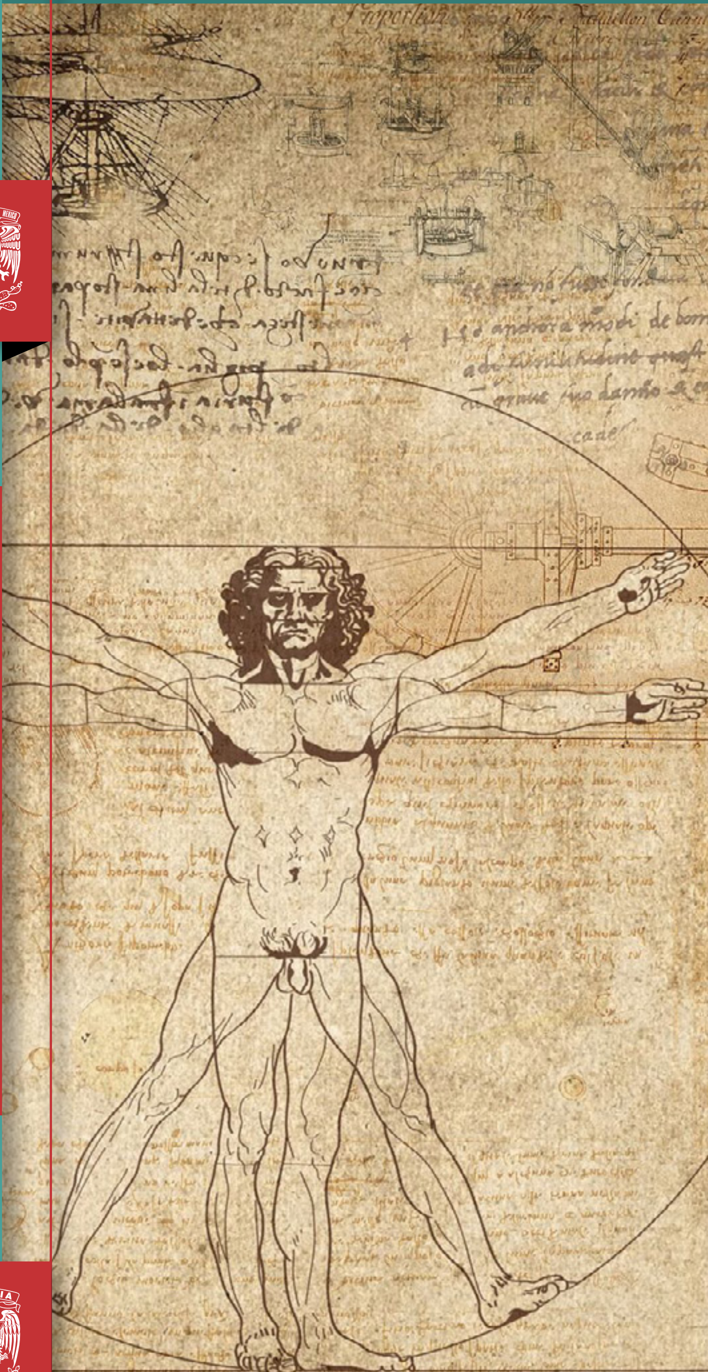
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL



APLICACIONES AL ÁLGEBRA LINEAL

Autores:
Adrián Gutiérrez Gómez
Ana Beatriz Almeida Salmerón
David Uziel Lara Olmos
Luis Armando Mata García
Victoria Mayela Luna Rojas

Coordinadora:
Idalia Flores de la Mota

CUADERNILLO
DE DIVULGACIÓN
16

APLICACIONES AL ÁLGEBRA LINEAL

Autores:
Adrián Gutiérrez Gómez
Ana Beatriz Almeida Salmerón
David Uziel Lara Olmos
Luis Armando Mata García
Victoria Mayela Luna Rojas

Coordinadora:
Idalia Flores de la Mota

CUADERNILLO
DE DIVULGACIÓN 16

Para visualizar la obra
te sugerimos
Acrobat Reader
Haz Click

Flores, De la Mota, Idalia (Coordinadora).
Aplicaciones al Álgebra Lineal.
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2022, 77 p.

Aplicaciones al Álgebra Lineal

Primera edición electrónica
de un ejemplar (3 MB) Formato PDF
Publicado en línea en junio de 2022

D.R. © 2022, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación
Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

Esta edición y sus características son propiedad de la
Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la
reproducción o transmisión total o parcial por cualquier
medio sin la autorización escrita del titular de los derechos
patrimoniales.

Hecho en México.

Unidad de Apoyo Editorial
Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz
Diseño y formación editorial : Nismet Díaz Ferro

230 AÑOS
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNAM
1792 - 2022

CONTENIDO

PRÓLOGO 6
SEMBLANZAS DE LOS AUTORES 8

CAPÍTULO 1 Manipulación de un cuerpo en el espacio . . . 11
1.1 Introducción 11
1.2 Definiendo un sistema coordenado 12
1.3 Rotaciones en espacio tridimensional 13

CAPÍTULO 2 Circuitos eléctricos 15
2.1 Introducción 15
2.2 Conceptos básicos de los circuitos eléctricos 16
2.3 Leyes de Kirchhoff 20
2.4 Construcción del sistema de ecuaciones 21
2.5 Solución a través del método de Gauss 23
2.6 Comentarios finales 23

CAPÍTULO 3 Matrices en cadenas de Markov. 24
3.1 Introducción 24
3.2 Matemáticas 25
3.3 Matrices 25
3.4 Operación de matrices 29
3.5 Matrices especiales 32
3.6 Aplicación de matrices 37
3.7 Conclusiones. 52

CAPÍTULO 4 Control de inventario 53
4.1 Introducción 53
4.2 Consideraciones 54
4.3 Modelo de Wilson (Demanda constante) 55
4.4 Caso de estudio: Entrega de material escolar 57

CAPÍTULO 5 Algoritmo JPEG 62
5.1 Introducción 62
5.2 Estándar JPEG 63
5.3 Algoritmo JPEG 64
5.4 Reconstrucción de la imagen 71

BIBLIOGRAFÍA. 73
ANEXO A. 76

1

2

3

4

5

PRÓLOGO

Como parte de las actividades del Departamento de Investigación de Operaciones e Ingeniería Industrial de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Facultad de Ingeniería, UNAM, nos hemos propuesto el desarrollo de material didáctico y de divulgación a través de la elaboración de una serie de cuadernillos de difusión, así como apuntes que complementen la bibliografía de los cursos de la Facultad. Este material se centra en los tópicos que aborda el álgebra lineal a través de aplicaciones sencillas. El propósito es apoyar tanto la labor docente como aumentar el conocimiento de la materia por los estudiantes a nivel maestría y licenciatura de las diferentes áreas de la ingeniería, así como de licenciaturas afines, para que conozcan el potencial que ofrecen estas herramientas.

Este material tiene como uno de sus objetivos introducir al lector en los temas de una manera clara y sencilla, pero sin perder el rigor teórico en su tratamiento. La selección, edición y revisión técnica del material fue realizada por Idalia Flores De la Mota, y la elaboración de cada capítulo estuvo a cargo de los alumnos de la maestría en Investigación de Operaciones:

1
2
3
4
5

Adrián Gutiérrez Gómez, Ana Beatriz Almeida Salmerón, David Uziel Lara Olmos, Luis Armando Mata García y Victoria Mayela Luna Rojas.

La redacción de este material fue una experiencia enriquecedora y los autores esperan que los estudiantes de ingeniería lo encuentren grato e informativo cuando traten de aprender cómo se puede aplicar el Algebra Lineal en sus campos de interés.

Agradezco en especial a la Maestra María Cuairán Ruidíaz y a Nismet Díaz Ferro por el apoyo en la revisión y formato de este material, así como a Mayela Luna por su apoyo al organizar todo el material.

Idalia Flores De La Mota

Coordinadora de la publicación

1
2
3
4
5

SEMBLANZAS DE LOS AUTORES

Adrián Gutiérrez Gómez

Es ingeniero civil titulado por parte de la UNAM. Trabajó en un laboratorio de mecánica de suelos. Quiere resolver problemas en beneficio social aplicando la Investigación de Operaciones. También le gustan los temas de filosofía y psicología.

Ana Beatriz Almeida Salmerón

Profesionista con experiencia en el análisis, estructuración y reporteo de datos, la investigación de mercados, el desarrollo de programas de experiencia del cliente y de mejora continua, así como en la gestión de proyectos. Es ingeniera industrial por la Facultad de Ingeniería de la UNAM, institución en la cual también ha realizado estudios de diplomado en Administración de Proyectos y Logística y Cadena de Suministro. Obtuvo también una diplomatura en Mercadotecnia Analítica en el ITAM y actualmente se encuentra estudiando una maestría en Investigación de Operaciones también en la UNAM. Desde 2015 forma parte de una de las aerolíneas mexicanas más reconocidas y actualmente funge como líder de Analítica de la Experiencia del Cliente, para generar hallazgos que deriven en estrategias a nivel corporativo para mejorar la experiencia de los pasajeros.

David Uziel Lara Olmos

En 2012 inició sus labores como ingeniero industrial creando un plan de desarrollo municipal en el municipio de Huaquechula, Puebla. Al realizar su servicio social, bajo la supervisión del Ing. Roberto Espriú Sen, en el periodo del 2013 se convirtió en coordinador para creación de un nuevo plan de desarrollo municipal en el municipio de Atlatlahucan, Morelos. En 2018 se convirtió en el único coordinador administrativo de la norma NOM-010-STPS-2014 del Departamento de Ambiente Laboral en DEISA SA de CV. Al mismo tiempo, se incorporó como docente a nivel preparatoria en el Instituto Isaac Newton, incorporado a la UNAM.

Luis Armando Mata García

Actuario por la FES Acatlán. Al concluir la licenciatura tomó un curso de Finanzas en la misma facultad, el cual fue de gran ayuda para colaborar en distintas organizaciones públicas y privadas en el área de prevención de riesgos financieros y análisis de datos para la mejor toma de decisiones en la organización. Posteriormente, la pasión por la enseñanza lo llevo a abrir una escuela de regularización para alumnos desde preescolar hasta universidad en las materias de matemáticas, lectura e inglés. Actualmente, cursa el posgrado en Investigación de Operaciones con la finalidad de poder brindar una mejor organización a su escuela, de tal forma que pueda maximizar rentabilidad y minimizar costos originados por el cambio constante en la dinámica de trabajo, debido al cierre de escuelas y trabajo a distancia.

Victoria Mayela Luna Rojas

Actuaria por la Facultad de Ciencias de la UNAM. En su carrea profesional se ha desempeñado como analista de gestión del portafolio de garantías en Nacional Financiera; se ha involucrado en el análisis, reporteo y estructuración de información financiera, así como en el desarrollo de un software de uso interno para el monitoreo de portafolios de inversión. También formó parte del área de suscripción para una compañía de seguros dentales, en donde se encargaba de realizar el análisis de la información utilizada para la tarificación de seguros y la elaboración de reportes del negocio. Actualmente se encuentra cursando una maestría en Ingeniería de Sistemas con enfoque a la investigación de operaciones en la UNAM.

CAPÍTULO 1

Manipulación de un cuerpo en el espacio

Adrián Gutiérrez Gómez

1.1 Introducción

Uno de los desafíos que podría enfrentar un piloto de control de un transbordador espacial es cómo llevar el transbordador de un punto a otro. En otras palabras, el piloto tiene un “lugar” deseado en un espacio tridimensional para que llegue el transbordador. El objetivo aquí es poder imponer alguna secuencia de comandos para que el transbordador llegue a algún vector objetivo. Esta aplicación se centra en los conceptos que es necesario comprender antes de crear la “matriz de controlabilidad”, es decir, obtener un conjunto de vectores ortogonales para definir un sistema de coordenadas y las matemáticas de la matriz de rotación 3D.

Existen dos conceptos principales que hay que comprender antes de resolver este problema. Primero, debemos **definir un sistema de coordenadas para nuestro objeto.** Un requisito es que cada vector en este sistema debe ser ortogonal, es decir, perpendicular. Matemáticamente hablando,

1
2
3
4
5

esto significa que todas las combinaciones de pares de nuestros vectores deben tener un producto escalar de cero. Este tema se explorará con más detalle en la siguiente sección. En segundo lugar, necesitamos poder **rotar nuestro objeto sobre cada uno de los ejes en nuestro sistema de coordenadas.** Esto implica el uso de la matriz de rotación como se define para el caso 3×3. En esta aplicación del transbordador espacial, solo se considera la matriz de rotación para el caso 3×3.

1.2 Definiendo un sistema coordenado

Es importante entender que el sistema de coordenadas que definimos es "fijo". Cuando decimos que el sistema es "fijo", no queremos decir que está fijo al objeto (es decir, al transbordador espacial), sino que su orientación está fija en el espacio.

Como se mencionó anteriormente, un sistema de coordenadas que sea útil para la manipulación debe ser ortogonal. En términos de matrices, esto equivale a decir que "cada par de vectores distintos del conjunto de coordenadas es ortogonal" (Lay, página 379).

Por ejemplo, supongamos que tenemos un conjunto de tres vectores $\{i, j, k\}$. Para encontrar si este conjunto es ortogonal o no, consideramos los tres posibles pares de vectores, a saber, $\{i, j\}$, $\{i, k\}$ y $\{j, k\}$. ¿El producto escalar de cada uno de estos vectores es cero? Para este cálculo, consulte el Anexo A.

El Anexo A muestra que cuando los productos escalares de cada par de vectores en nuestro conjunto son cero, de hecho, tenemos un conjunto ortogonal. Una vez que definamos un conjunto ortogonal para nuestro objeto, podemos usar estos vectores como nuestro sistema de coordenadas. Una vez que orientemos nuestro objeto en un sistema de coordenadas ortogonales, debemos ser capaces de manipularlo y controlarlo. Una forma de hacer esto es rotar nuestro objeto sobre cada uno de los ejes que acabamos de definir como nuestro sistema de coordenadas.

En términos del transbordador espacial, la capacidad de rotar se traduce en poder apuntar el transbordador en la dirección que queremos que vaya. La siguiente sección describe tales métodos de rotación.

1.3 Rotaciones en espacio tridimensional

La matriz de rotación para el caso 3×3 se define de la siguiente manera:

Rotación alrededor del eje x (balanceo):

Rotación en sentido antihorario de gamma alrededor del eje x

$$R_x(\gamma) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor del eje y (cabeceo):

Rotación en sentido antihorario de beta alrededor del eje y

$$R_y(\beta) := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor del eje z (guiñada) :

Rotación en sentido antihorario de alfa alrededor del eje z

$$R_z(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los términos "balanceo, cabeceo y guiñada" se utilizan para describir las rotaciones sobre los ejes x, y y z del sistema de coordenadas fijas, respectivamente.

Cada matriz de rotación para el caso 3D es una simple extensión de la rotación 2D matriz. Por ejemplo, la matriz de guiñada esencialmente realiza una rotación 2D con respecto al plano x-y, mientras deja la coordenada z sin cambios. La tercera fila y columna parecen parte de la matriz de identidad, mientras que la parte superior izquierda de la matriz de guiñada parece la matriz de rotación 2D.

Las matrices de rotación se pueden multiplicar entre sí, lo que conduce a una serie de rotaciones de un objeto alrededor de la x ejes y y z. Hay un hecho crucial para tener en cuenta cuando se trata de matrices de rotación: el orden de las rotaciones es importante, lo que significa que no es conmutativo.

A partir de estos dos conceptos básicos, el cómo crear conjuntos de vectores ortogonales y cómo manipular vectores en tres espacios, se puede desarrollar una secuencia de operaciones de control para dirigir objetos tridimensionales como un transbordador espacial.

1
2
3
4
5

CAPÍTULO 2

Circuitos eléctricos

Ana Beatriz Almeida Salmerón

2.1 Introducción

Los arreglos y operaciones matriciales resultan de gran utilidad para la ingeniería y ciencias aplicadas, de tal forma que no es poco común encontrar herramientas y soluciones a problemas de diversas materias, como son la física, la química, la mecánica y mecatrónica, la informática, la economía, el transporte y logística, entre muchas otras, que están fundamentadas en el álgebra lineal.

Una de tantas aplicaciones se puede encontrar en uno de los conocimientos más fundamentales del campo de la ingeniería eléctrica: el cálculo de corriente de un circuito eléctrico. En la aplicación que se abordará a continuación, se hará uso de los conceptos más básicos de las operaciones con matrices, como son los sistemas lineales y el método de Gauss. Estos métodos son muy utilizados en problemas con principios básicos de conservación.

El objetivo de este capítulo, más allá de explicar la forma de utilizar el álgebra matricial como herramienta para calcular corrientes eléctricas, es el de exponer a los estudiantes de matemáticas la versatilidad de las operaciones matriciales en la resolución de problemas prácticos de distinta índole.

2.2 Conceptos básicos de los circuitos eléctricos

Para tener una mejor comprensión del problema que se está solucionando, se comenzará por presentar de forma breve algunos de los conceptos y componentes involucrados en esta aplicación.

Circuito eléctrico

Un circuito eléctrico es un conjunto de dispositivos que al estar conectados entre sí permiten generar y transportar corrientes eléctricas. Los elementos principales para el funcionamiento de un circuito eléctrico son: fuente de tensión, conductor, resistencia eléctrica e interruptor. Desde un enfoque sistémico, un circuito eléctrico se puede representar con un diagrama de bloque, donde el circuito recibe un estímulo (fuente de tensión) y genera una respuesta (corrientes).

Figura 1. Diagrama de bloque de un circuito eléctrico

Para estudiar las propiedades de los circuitos eléctricos, se realizan modelos matemáticos que involucran a cada uno de los componentes del circuito. En dichos modelos, se plantean ecuaciones basadas en axiomas fundamentales de la teoría de los circuitos y ecuaciones que relacionan las diferentes magnitudes eléctricas.

Existen dos ramas en el estudio de los circuitos: el *análisis de redes*, que se enfoca en calcular la respuesta conociendo la entrada y los componentes del circuito, y la *síntesis de redes*, que permite conocer los componentes del circuito sabiendo la entrada y la respuesta de este. En este trabajo nos enfocaremos en el análisis de redes.

Corriente eléctrica

Al movimiento neto de cargas eléctricas que atraviesan una sección se le conoce como corriente eléctrica. Al cociente entre la carga $dq(t)$ y el tiempo dt en el que atraviesa la sección, se le conoce como intensidad de la corriente eléctrica. Este término, al que coloquialmente solo se le llama corriente, tiene como unidad de medida el *amper* $[A]$ y esquemáticamente es representada con una flecha.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}\ [\mathrm{A}]$$

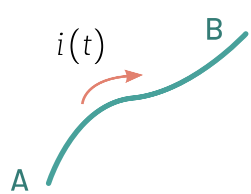


Figura 2. Representación de la corriente eléctrica

Fuente de tensión

Es el elemento que proporciona la energía eléctrica con una tensión determinada e independiente de la corriente que pasa a través de él. La tensión o diferencia de potencial es el trabajo requerido para mover una unidad de carga a través de la sección. Se mide en *volts* $[V]$ y está dada por la diferencia de tensión entre el punto A y el punto B.

$$u_{AB} = u(t) = u_A - u_B = \frac{dw}{dq}\ [V]$$

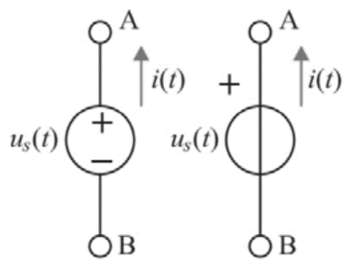


Figura 3. Representación común de un generador de tensión

Resistencia

Es un elemento pasivo dentro del circuito, ya que no aporta corriente. Las resistencias son los componentes que tienen la función de oponerse al paso de la corriente eléctrica. Su unidad de medida es el ohm $[\Omega]$.

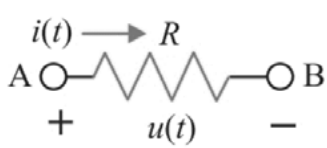


Figura 4. Representación de una resistencia

Ley de Ohm

La ley de Ohm expresa la relación existente entre las magnitudes de la tensión, la corriente y la resistencia en un circuito eléctrico. Esta ley enuncia que la intensidad de la corriente es directamente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia que presenta. De esta forma, tenemos lo siguiente:

$$I = \frac{V}{R}$$

$$V = IR$$

Conductor

El conductor es el camino por el cual circula la corriente eléctrica impulsada por el generador o fuente de tensión.

Nodo principal

Es un punto del circuito donde se conectan 3 o más conductores o elementos.

Malla

Es el conjunto de conductores que forman una línea cerrada y que no contienen ningún lazo en su interior.

2.3 Leyes de Kirchhoff

Como se comentó anteriormente, el cálculo de las corrientes que circulan en un circuito eléctrico pertenece al grupo de problemas de conservación. Se conocen de esta manera debido a que su planteamiento está basado en que la magnitud del flujo de algo que entra en una red se mantiene cuando sale. Este principio básico se puede encontrar en redes de vehículos, personas, líquidos o en redes eléctricas, y el álgebra lineal es utilizada de forma natural para resolver este tipo de sistemas.

En el caso particular de los circuitos eléctricos, el fundamento teórico para formular el sistema de ecuaciones utilizando el principio de conservación, se encuentra en las leyes de Kirchhoff. Gustav Kirchhoff fue un físico alemán que enunció en 1845 las ahora llamadas leyes de Kirchhoff de voltaje y corriente, las cuales son la base del análisis de circuitos.

1ª Ley de Kirchhoff

También se conoce como la ley de conservación de las cargas. Lo que se establece en esta ley es que la suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma algebraica de las corrientes que salen del nodo.

$$\sum i = 0$$
$$i_1 + i_4 + i_5 = i_2 + i_3$$
$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

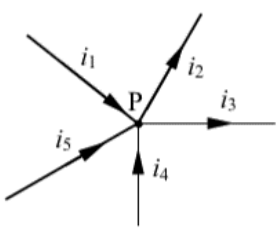


Figura 5. Representación de las corrientes que circulan por el nodo P

2ª Ley de Kirchhoff

También se conoce como la ley de conservación del campo de energía. En esta ley se establece que, en una malla o línea cerrada, la suma de tensiones aportadas por las fuentes es igual a las caídas de tensión provocadas por los elementos pasivos.

$$\sum V + \sum IR = 0$$
$$u_1 + u_4 + u_5 = u_2 + u_3$$
$$u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

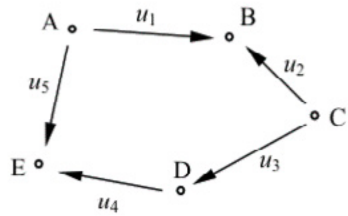


Figura 6. Representación de los voltajes que circulan en la malla ABCDE

2.4 Construcción del sistema de ecuaciones

Una vez comprendidos los elementos básicos de un circuito eléctrico y los fundamentos teóricos para su análisis, podemos plantear el problema por resolver haciendo uso de ecuaciones lineales. El objetivo es determinar la respuesta del sistema, es decir, la corriente del circuito, conociendo la fuente y los componentes. Para fines prácticos, se explicará el método para generar las ecuaciones lineales conforme se resuelve un ejercicio simple.

Considere el circuito dado a continuación:

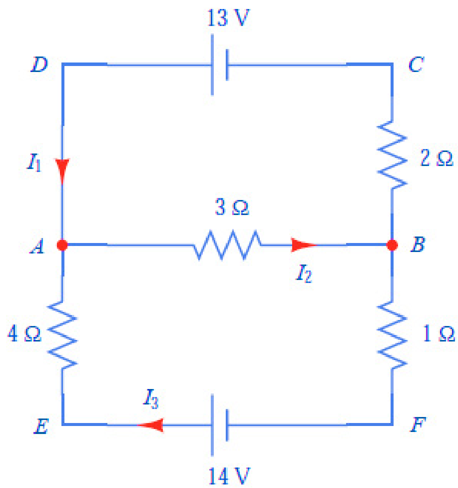


Figura 7. Representación del ejercicio propuesto

El primer paso es identificar los nodos del sistema. Una vez identificados, de acuerdo con la 1ª ley de Kirchhoff o ley de conservación de cargas, se definen las corrientes que entran y salen de cada nodo. De tal forma que se tiene:

$$\begin{aligned} \mathit{Nodo}\ A &= I_1 + I_3 = I_2 \\ \mathit{Nodo}\ B &= I_1 + I_3 = I_2 \end{aligned}$$

Posteriormente, considerando la 2ª ley de Kirchhoff o ley de conservación del campo de energía, establecemos las ecuaciones de las tensiones en cada una de las mallas del circuito.

$$\begin{aligned} \mathit{Malla}\ ABCDA &= 2I_1 + 3I_2 = 13 \\ \mathit{Malla}\ ABFEA &= 3I_2 + 5I_3 = 14 \end{aligned}$$

Al tener definidas las ecuaciones gracias a las leyes de Kirchhoff podemos establecer el sistema de ecuaciones lineales y resolverlo de manera sencilla con el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_1 & + & I_3 & = & 0 \\ I_1 & - & I_2 & + & I_3 & = & 0 \\ 2I_1 & + & 3I_2 & & & = & 13 \\ & & 3I_2 & + & 5I_3 & = & 14 \end{array}$$

2.5 Solución a través del método de Gauss

Ya que se cuenta con el sistema de ecuaciones por resolver, este se puede representar en forma matricial y aplicar el algoritmo de preferencia para determinar los valores de las incógnitas, en este caso, las corrientes del circuito.

1

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 5 & 14 \end{array}\right|$$

2

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 5 & 14 \end{array}\right|$$

3

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 13 \\ 0 & 3 & 5 & 14 \end{array}\right|$$

4

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 31 & 31 \end{array}\right|$$

De esto se obtiene que: $I_3 = 1[A]$, $I_2 = 3[A]$, $I_1 = 2[A]$

2.6 Comentarios finales

Claramente este es un ejemplo muy básico, sin embargo, el uso del álgebra lineal permite que aun al aumentar la complejidad de los circuitos eléctricos, el sistema sea fácilmente resuelto. Además de apreciar las bondades de las operaciones con matrices, es importante resaltar que existen aplicaciones con planteamientos basados en principios similares, para los cuales, el álgebra lineal es fundamental.

1
2
3
4
5

CAPÍTULO 3

Matrices en cadenas de Markov

David Uziel Lara Olmos

3.1 Introducción

A lo largo de la historia las Matemáticas han ocupado un lugar importante en los planes de enseñanza en las escuelas, para desarrollar la capacidad del pensamiento, por su utilidad tanto para la vida diaria como para el aprendizaje de otras disciplinas, además de ser una ciencia de lenguaje universal. Por ello, en este artículo se introducirá la importancia del estudio de las matemáticas y se mostrarán ejemplos que lo ayudarán entre otras cosas, a pensar mejor.

1
2
3
4
5

3.2 Matemáticas

La necesidad de las matemáticas

Las matemáticas son tan antiguas que desde tiempos prehistóricos se usaban los dedos para contabilizar, más tarde las civilizaciones empezaron a tener un pensamiento más profundo sobre las matemáticas. Los números fueron un elemento fundamental en todas las épocas: los sistemas de numeración aparecieron en lugares distintos del planeta, desarrollados por civilizaciones que no tenían ningún tipo de contacto.

Con el paso del tiempo, los sistemas numéricos se volvieron más complejos. La civilización griega antigua comenzó a buscar explicaciones racionales a fenómenos naturales, y sentó las bases de la geometría y la aritmética. En esta civilización destacaron figuras como Pitágoras o Téano, la primera mujer matemática de la historia (y esposa de Pitágoras). La civilización romana utilizo los números para tener un control del tiempo. Tan es así, que aún usamos su numeración para escribir ciertas fechas, como los siglos.

Hoy en día, las matemáticas son un método lógico que nos permite avanzar en cualquier ámbito de la sociedad y resolver interrogantes a los que aún no hemos sido capaces de encontrar una explicación.

3.3 Matrices

El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y en un enfoque más formal, espacios vectoriales y sus transformaciones lineales.

Es un área que tiene conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, etc.

La historia del álgebra lineal se remonta a 1843, cuando William Rowan Hamilton (de quien proviene el uso del término vector) creó los cuaterniones; y en 1844 fue cuando Hermann Grassmann publicó su libro *Die lineale Ausdehnungslehre (La teoría lineal de extensión)*.

La importancia del álgebra lineal para las aplicaciones se ha ido incrementando, muchas decisiones administrativas importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, la industria de las aerolíneas emplea programas lineales para crear los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorear las ubicaciones de los aviones, o planear los diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento, y operaciones en terminal.

Una gran cantidad de problemas que se presentan en las ciencias naturales, en las ciencias sociales, ingeniería, tienen que ver con ecuaciones que relacionan dos conjuntos de variables.

Una ecuación líneal es: $y = mx + b$ donde la variable x se denomina "variable independiente" y la variable y se denomina "variable dependiente",
La representación de una ecuación con más de dos incógnitas es:

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_n a_n = b$$

La representación de un sistema de ecuaciones con n incógnitas y m ecuaciones se representa:

$$a_{11}a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = b_1$$
$$a_{21}a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = b_2$$
$$a_{31}a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = b_3$$
.

.
$$a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = b_m$$

Estas nuevas ecuaciones requieren de una estructura matemática que permita trabajarlas; bajo estas estructuras, se les puede descomponer, por medio de un proceso multiplicativo en dos elementos separados que permite escribir el sistema de ecuaciones como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1m \\ a21 & a22 & \cdots & a2m \\ a31 & a32 & \cdots & a3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1 & an2 & \cdots & anm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \\ \vdots \\ bm \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1m \\ a21 & a22 & \cdots & a2m \\ a31 & a32 & \cdots & a3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1 & an2 & \cdots & anm \end{bmatrix}$$

Se denomina una matriz a un conjunto de números, objetos u operadores, dispuestos en un arreglo bidimensional de renglones y columnas, encerrados entre paréntesis rectangulares, que obedecen ciertas reglas algebraicas. Cada una de las partes integrantes del arreglo es llamado elemento de la matriz y su localización en el arreglo es identificado por un sistema de doble subíndice en el cual, el primer subíndice indica el renglón y el segundo subíndice indica la columna.

En donde el elemento a_{ij} está localizado en el renglón i-ésimo y la j-ésima columna del arreglo de A.

Una matriz que tiene n renglones y m columnas se dice que es una matriz de orden $n \times m$.

Una matriz con un arreglo de un solo renglón o una sola columna es conocida como vector renglón o vector columna, respectivamente.

Una matriz cuadrada es cuando posee el mismo número de renglones y de columnas.

La diagonal principal de una matriz cuadrada es el conjunto de elementos que aparecen sobre la diagonal del arreglo que va desde el extremo superior izquierdo hasta el extremo inferior derecho, es decir los elementos a_{ii}. La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal principal. Se denota como:

$$tr\left(A\right) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nm}; \qquad \text{donde } n = m.$$

La transpuesta de una matriz A, es la matriz designada como A^T en donde los renglones de A pasan a ser las columnas de A^T y las columnas de A pasan a ser los renglones de A^T.

3.4 Operación de matrices

Suma

La suma de dos matrices $C = A + B$ se define como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Esto es la suma de sus elementos correspondientes de ambas matrices que tienen el mismo orden, es decir, matrices que tienen el mismo número de renglones y de columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1m \\ a21 & a22 & \cdots & a2m \\ a31 & a32 & \cdots & a3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1 & an2 & \cdots & anm \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \cdots & b1m \\ b21 & b22 & \cdots & b2m \\ b31 & b32 & \cdots & b3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ bn1 & bn2 & \cdots & bnm \end{bmatrix}$$

$$A{+}B = \begin{bmatrix} a11+b11 & a12+b12 & \cdots & a1m+b1m \\ a21+b21 & a22+b22 & \cdots & a2m+b2m \\ a31+b31 & a32+b32 & \cdots & a3m+b3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1+bn1 & an2+bn2 & \cdots & anm+bnm \end{bmatrix}$$

La operación suma cumple con las siguientes propiedades

Propiedad asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
Propiedad conmutativa: $(A + B) = (B + A)$

1 2 3 4 5

1
2
3
4
5

Diferencia

La diferencia de dos matrices $C = A - B$ se define como $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Esto es la diferencia de sus elementos correspondientes de ambas matrices que tienen el mismo orden.

$$A\text{-}B = \begin{bmatrix} a11 - b11 & a12 - b12 & \cdots & a1m - b1m \\ a21 - b21 & a22 - b22 & \cdots & a2m - b2m \\ a31 - b31 & a32 - b32 & \cdots & a3m - b3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1 - bn1 & an2 - bn2 & \cdots & anm - bnm \end{bmatrix}$$

Multiplicación por un escalar

El producto de una matriz A por un escalar k, se define como $k * A = k * a_{ij}$, esto es, multiplicar cada uno de los elementos de la matriz por el escalar.

$$KA = \begin{bmatrix} ka11 & ka12 & \cdots & ka1m \\ ka21 & ka22 & \cdots & ka2m \\ ka31 & ka32 & \cdots & ka3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ kan1 & kan2 & \cdots & kanm \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Para efectuar la multiplicación de dos matrices se requiere que las matrices sean permutables, es decir, que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de renglones de la segunda matriz. Si tenemos una matriz A de orden $p \times n$ y una matriz B que es de orden $n \times q$ la matriz resultante es $p \times q$. Los elementos de la nueva matriz C, producto de las matrices $A * B$ se define como:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} aik * bkj$$

Donde i va desde 1 hasta p y j va desde 1 hasta q.

El elemento que ocupa la posición ij de la matriz C de p filas y q columnas, se obtiene sumando los productos de los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B.

Hay que hacer mención que el producto de las matrices en la gran mayoría de los casos no es conmutativo, es decir

$$A * B \neq B * A$$

El producto obtenido cumple con dos propiedades:

Propiedad asociativa: $A * (B * C) = (A * B) * C$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma: $C * (A + B) = C * A + C * B$

Hay que hacer una mención especial que la operación división en matrices no está definida. La inversión de matrices es la contraparte de la división en álgebra matricial.

1
2
3
4
5

3.5 Matrices especiales

Matriz cero / matriz nula

Es la matriz cuyos elementos valen cero, puede ser de cualquier orden. Sus propiedades son:

$$0 * A = 0$$
$$0 + A = A$$

Matriz Identidad / matriz unitaria

Es una matriz cuadrada de orden n tal que los elementos de su diagonal principal son uno y los elementos fuera de ella son cero.

La propiedad principal de una matriz cuadrada es que:

$$I * A = A * I = A$$

Determinantes de matrices

Sea una matriz A cuadrada de orden n. Se define como determinante A (denotado como $|A|$, det A o Δ_A) a la suma de los n productos (signados) formados por n-factores que se obtienen al multiplicar n-elementos de la matriz, de tal forma que cada producto contenga un solo elementos de cada fila y columna de A, lo cual significa que el determinante de una matriz es un valor numérico K que está relacionado con una matriz cuadrada y que sigue ciertas reglas para su cálculo.

$$\det A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1m \\ a21 & a22 & \cdots & a2m \\ a31 & a32 & \cdots & a3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1 & an2 & \cdots & anm \end{bmatrix} = K$$

Cálculo de determinantes de segundo y tercer grado

Para calcular el determinante de segundo y tercer grado el método más simple es el de multiplicación diagonal, mejor conocida como regla de Sarrus.

Para una matriz de segundo orden su determinante se calcula de la siguiente manera:

$$\det A = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} = a11\,a22 - a21\,a12$$

Para un determinante para una matriz de 3×3 (tercer orden) se calcula de la siguiente manera:

$$\det A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13m \\ a21 & a22 & a23m \\ a31 & a32 & a33m \end{bmatrix}$$

$$= a11\,a22\,a23 + a21\,a32\,a13 + a31\,a12\,a23$$

$$-\left(a31\,a22\,a13 + a21\,a12\,a33 + a11\,a32\,a23\right)$$

Menor de un elemento

Sea un determinante de orden n, correspondiente a una matriz A, se define como menor de un elemento a_{ij} al determinante resultante de eliminar el renglón i y la columna j, se denota como M_{ij}

$$M_{ij} = A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdot & a1j & \cdot & a1m \\ a21 & a22 & \cdot & a2j & \cdot & a2m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cancel{ai1} & \cancel{ai2} & \cdot & aij & \cdot & \cancel{aim} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ an1 & an2 & \cdot & anj & \cdot & anm \end{bmatrix}$$

Cofactor de un elemento

Se define como cofactor de un elemento a_{ij}, el cual se denota como A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Con estos dos últimos conceptos, el determinante de una matriz A de cualquier orden puede obtenerse mediante la suma de los productos de los elementos de cualquier renglón o columna por sus respectivos cofactores:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} akj * Akj = \sum_{i=1}^{n} ail * Ail$$

para cualquier renglón k o la columna l.

Matriz adjunta

Si $A = a_{ij}$ es una matriz cuadrada y A_{ij} es el cofactor de a_{ij}, se define la matriz adjunta de A, denotada como Adj A, como la matriz de cofactores de su transpuesta.

Esto significa que para encontrar la matriz adjunta se transpone la matriz y después, con base en ella, se calcula la matriz de cofactores.

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A11 & A12 & \cdots & A1m \\ A21 & A22 & \cdots & A2m \\ A31 & A32 & \cdots & A3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ An1 & An2 & \cdots & Anm \end{bmatrix}$$

Matriz inversa por el método de la adjunta n×m

La inversa de una matriz está definida como aquella matriz que multiplicada por la matriz original da por resultado la matriz identidad, se denota como A^{-1}.

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = I$$

Esto se cumplirá siempre y cuando $\det(A) \neq 0$ Para obtener la matriz inversa mediante la adjunta se utiliza la siguiente expresión.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * \text{Adj } A = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} A11 & A12 & \cdots & A1m \\ A21 & A22 & \cdots & A2m \\ A31 & A32 & \cdots & A3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ aAn1 & An2 & \cdots & Anm \end{bmatrix}$$

El procedimiento para obtener la matriz inversa mediante la matriz adjunta es:

- Se calcula el determinante de la matriz, si el determinante de dicha matriz es diferente a cero, la matriz en cuestión tiene matriz, en caso contrario se dice que la matriz es singular y no tiene matriz inversa.
- Se obtiene la transpuesta de la matriz en cuestión.
- Se calcula la matriz de cofactores de la matriz transpuesta, dando a lugar a la matriz adjunta en cuestión.
- Se forma el producto

$$\frac{1}{det(A)} * \mathrm{Adj}\, A$$

Matriz inversa por transformaciones elementales

El método por transformaciones elementales consiste en agregar una matriz identidad del mismo orden.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} a11 & a12 & \cdots & a1m & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a21 & a22 & \cdots & a2m & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a31 & a32 & \cdots & a3m & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an1 & an2 & \cdots & anm & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Para producir ceros y unos en el lado de la matriz original, los unos deben estar alojados en la diagonal principal y los ceros fuera de la diagonal principal. Cuando se termine el proceso, la matriz que resulta del lado donde se añadió la matriz unitaria, será la matriz inversa.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t11 & t12 & \cdots & t1m \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & t21 & t22 & \cdots & t2m \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & t31 & t32 & \cdots & t3m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & tn1 & tn2 & \cdots & tnm \end{array}\right]$$

3.6 Aplicación de matrices

Una aplicación de las matrices se puede encontrar en la criptografía, que se define como el arte y técnica de escribir con clave secreta o de un modo enigmático.

Originalmente se usaban técnicas para ocultar mensajes de los enemigos, posteriormente se cambió el ocultar la existencia del mensaje por ocultar el significado. Después de un tiempo, los métodos de encriptación se volvieron de carácter matemático, llegando a ser utilizados como parte de tácticas militares en la Segunda Guerra Mundial.

Cifrado de Hill

Un método de codificación se observa como un procedimiento mediante el cual se asigna un nuevo "carácter numérico" a los caracteres del mensaje que se desea trasmitir. Existen diversos métodos para cifrar mensajes, en el presente caso nos centraremos en un sistema basado en el álgebra de las matrices, inventado por el matemático estadounidense Lester S. Hill en 1929, dado a conocer en un artículo publicado en el diario de New York.

Para este cifrado necesitaremos definir una matriz A_{nxm} una matriz invertible, y M_{nxm} matriz que contiene un mensaje. Entonces $C = AM$ será el mensaje cifrado, donde C será la matriz cifrada. Y para poder descifrar el mensaje se lleva a cabo la operación $A^{-1}C = A^{-1}AM = IM = M$. Podemos observar que la matriz A es la matriz de codificación y la matriz A^{-1} es la matriz de decodificación.

Consideraciones

- La matriz A debe ser invertible.
- Se necesita que tanto el emisor como receptor de dicho mensaje codificado conozcan la matriz de codificación y el código.

Apoyémonos en un ejemplo para poder realizar la codificación de un mensaje.

Paso 1

Elegimos un código acordado y el mensaje por codificar.

Código: La proposición del código puede ser tan ligera o complicada como se desee, con más o menos caracteres.

En este caso se escogen los números primos.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61

R	S	T	U	V	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	(_) espacio
67	71	73	79	83	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107

Mensaje: *Las matrices y aplicaciones*
Con ayuda del código acordado transcribimos el mensaje:

37	2	71	107	41	2	73	67	23	5	11	71	107	101	107
L	a	s	_	m	a	t	r	i	c	e	s	_	y	_

2	59	37	23	5	2	5	23	53	43	11	71
a	p	l	i	c	a	c	i	o	n	e	s

Paso 2

Proponemos una matriz invertible de orden n, según sea nuestra preferencia que será nuestra matriz codificadora. Para este caso utilizaremos una matriz de orden 4 cuyos elementos serán los primeros 16 números decimales de π.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

cuya matriz invertible es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{119}{1857} & \frac{86}{619} & \frac{-211}{1857} & \frac{7}{1857} \\ \frac{-8}{1857} & \frac{-63}{619} & \frac{61}{1857} & \frac{218}{1857} \\ \frac{-565}{1857} & \frac{-39}{619} & \frac{61}{1857} & \frac{218}{1857} \\ \frac{467}{1857} & \frac{41}{619} & \frac{-79}{1857} & \frac{-191}{1857} \end{bmatrix}$$

Que se obtiene a partir de obtener la matriz inversa por el método de la adjunta $n \times m$.

Paso 3

Separamos el mensaje de acuerdo con el orden de la matriz de codificación, en este caso, si la multiplicación es $A * M$ donde M es la matriz con el mensaje, verificamos que sean permutables.

$$A_{4 \times 4} M_{n \times m}$$

Por lo que requerimos que la matriz M del mensaje sea de orden 4xm para que la nueva matriz sea de orden $4 \times m$. Separando el mensaje en matrices nos quedaría de la siguiente manera:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 37 & 41 & 23 & 107 & 59 & 2 & 43 \\ 2 & 2 & 5 & 101 & 37 & 5 & 11 \\ 71 & 73 & 11 & 107 & 23 & 23 & 71 \\ 107 & 67 & 71 & 2 & 5 & 53 & 107 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} L & m & i & \_ & p & a & n \\ a & a & c & y & l & c & e \\ s & t & e & \_ & i & i & s \\ \_ & r & s & a & c & o & \_ \end{bmatrix}$$

Hay que hacer la mención que si en la matriz llegaran a faltar elementos los podemos rellenar con un carácter especial o en este caso, lo rellenamos con un espacio.

1
2
3
4
5

Paso 4

Se procede a obtener la matriz codificada C con ayuda de la operación definida como:

$$C = A * M$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 & 41 & 23 & 107 & 59 & 2 & 43 \\ 2 & 2 & 5 & 101 & 37 & 5 & 11 \\ 71 & 73 & 11 & 107 & 23 & 23 & 71 \\ 107 & 67 & 71 & 2 & 5 & 53 & 107 \end{bmatrix}$$

Cuyo resultado es:

$$C = \begin{bmatrix} 651 & 457 & 409 & 628 & 255 & 310 & 693 \\ 1298 & 1146 & 638 & 1817 & 768 & 431 & 1370 \\ 1652 & 1320 & 821 & 1700 & 591 & 692 & 1715 \\ 704 & 658 & 381 & 1983 & 825 & 234 & 827 \end{bmatrix}$$

El mensaje cifrado quedaría:

651 1298 1652 704 457 1146 1320 658 409 638 821 381 628 1817 1700 1983 255 768 591 825 310 431 692 234 693 1370 1715 827

Como se aprecia, el mensaje cifrado carece de un orden, secuencia o lógica en sus elementos.

Paso 5

Una vez que el receptor tenga el mensaje codificado deberá ordenarlo nuevamente en una matriz con vectores columnas para obtener la matriz codificada y multiplicarla por la matriz codificadora invertible y luego comparar con el código acordado.

Es por eso la importancia de que tanto el emisor como el receptor conozcan tanto la matriz codificadora como el código de cambio de caracteres a números.

$$M = A^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{119}{1857} & \frac{86}{619} & \frac{-211}{1857} & \frac{7}{1857} \\ \frac{-8}{1857} & \frac{-63}{619} & \frac{61}{1857} & \frac{218}{1857} \\ \frac{-565}{1857} & \frac{-39}{619} & \frac{61}{1857} & \frac{218}{1857} \\ \frac{467}{1857} & \frac{41}{619} & \frac{-79}{1857} & \frac{-191}{1857} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 651 & 457 & 409 & 628 & 255 & 310 & 693 \\ 1298 & 1146 & 638 & 1817 & 768 & 431 & 1370 \\ 1652 & 1320 & 821 & 1700 & 591 & 692 & 1715 \\ 704 & 658 & 381 & 1983 & 825 & 234 & 827 \end{bmatrix}$$

$$M = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 37 & 41 & 23 & 107 & 59 & 2 & 43 \\ 2 & 2 & 5 & 101 & 37 & 5 & 11 \\ 71 & 73 & 11 & 107 & 23 & 23 & 71 \\ 107 & 67 & 71 & 2 & 5 & 53 & 107 \end{bmatrix}$$

Como se aprecia, la matriz resultante es la matriz original M que se obtuvo al hacer el arreglo inicial para poder operarla.

Cadenas de Markov

Otra de las aplicaciones de las matrices junto con probabilidad son las cadenas de Markov.

Experimentos y espacios muestrales

La teoría de la probabilidad ha sido motivada por diversas situaciones de la vida real en la que se realizan experimentos y el investigador observa un resultado que no puede predecir con certeza, a estos experimentos se les llama "experimentos aleatorios".

Si bien no podemos predecir con certeza los resultados de los experimentos aleatorios, sí es posible describir el conjunto de resultados posibles, además el experimento se puede repetir en condiciones invariantes, a pesar de lo cual los resultados serían fortuitos, pero a medida que los experimentos se repiten los resultados toman cierto patrón de ocurrencia.

Al conjunto de resultados posibles se llama espacio muestral, denotado con la letra S. Un evento A está asociado con el espacio muestral del experimento, se dice que es el conjunto universal, de modo que el evento A sería un subconjunto del espacio muestral S.

Definición de probabilidad

Si un experimento tiene un espacio muestral S y un evento A está definido en el espacio muestral, entonces $P(A)$, la probabilidad de ocurrencia del evento A es un número real; tiene las siguientes características:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(S) = 1$
- Para cualquier número finito k, de eventos mutuamente excluyentes definidos en S, entonces: $P(U_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$
- Si $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ es una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes definidos en S, entonces: $P(U_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Si el espacio muestral es finito y tiene n resultados equiprobables de modo que $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$, entonces: $P(A) = n(a)/n$

Variables

Variable aleatoria se define si en un experimento que tiene espacio muestre al S, y X es una función que asigna un número real $X(A)$ para todo resultado que $A \in S$.

Variable aleatoria discreta es cuando toma valores en un conjunto numerable $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$.

Variable aleatoria continua es si toma valores en un conjunto no numerable.

Definición de cadenas de Markov

Para poder entrar al estudio de cadenas de Markov, necesitamos conocer lo que es un proceso estocástico, el cual se define como una colección de variables aleatorias $\{X_t\}$, donde t toma valores de un conjunto de T dado.

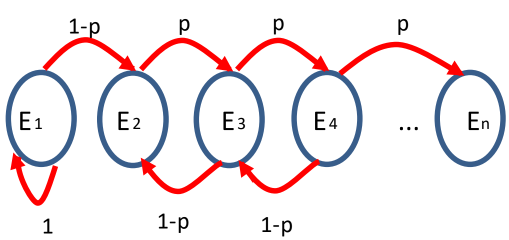
Por lo que un proceso estocástico es una descripción de relación entre las variables aleatorias X_0, X_1, ..., es decir, es un proceso que evoluciona de forma aleatoria a lo largo del tiempo tomando valores (estados) de un evento dado, por lo que las cadenas de Markov son un caso de los procesos estocásticos.

Las cadenas de Markov se caracterizan por ciertas propiedades donde:

1. El conjunto de sucesos (estados) posibles es finito.
2. La probabilidad del siguiente suceso depende solamente del suceso inmediato anterior $P(X_t+1=j \mid X_t=i)$.
3. Estas probabilidades permaneces constantes en el tiempo.

Un estado es un suceso individual, se denota como E_i, y significa que es i-ésimo estado de un total de m posibles, con $2 \leq m \leq \infty$, y esta es una característica de la situación actual en la que se encuentra un sistema en un instante determinado.

La representación de una cadena de Markov se da mediante una gráfica de círculos y arcos, en la cual se representa la relación entre estados.



Si esta información se escribe en forma matricial, se obtiene la matriz de transición de estados que contiene las probabilidades de transición de un estado a otro, denotado con la letra P.

Observamos que para escribir las probabilidades de transición de los estados en la matriz, donde los renglones indican el estado actual (desde) y las columnas el estado futuro (hasta).

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{Hasta} \\ & & & \begin{array}{cccccc} E1 & E2 & E3 & E4 & \cdots & En \end{array} \\ \text{Desde} & \begin{array}{c} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{array} & P = & \begin{bmatrix} 1 & 1-p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots & 1-p \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta matriz de transición debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Cada elemento (P_{ij}) es una probabilidad.
- Cada renglón (fila) suma exactamente 1.

Los elementos P_{ij} cumplen que $0 \leq P_{ij} \leq 1$ y además que $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

En una cadena de Markov se pueden clasificar los estados como:

- Estado accesible: se dice que el estado j es accesible desde el estado i si $p_{ij}(n) > 0$ para alguna $n \geq 1$. Si el estado j es accesible desde el estado i y viceversa entonces se dice que los estados i y j se comunican. Dos estados que se comunican pertenecen a la misma clase.
- Estado recurrente: si p_{ij} denota la probabilidad de que el proceso regrese al estado i dado que comienza en el estado i, entonces el estado es recurrente si $p_{ii} = 1$. Puede demostrarse que el estado i es recurrente si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rightarrow \infty$

1 2 3 4 5

- Estado transitorio: es aquel que tiene $p_{ii} < 1$. Los estados que no son transitorios son recurrentes.
- Estado absorbente: es aquel que tiene una probabilidad de ser abandonado igual a cero.
- Estado con periodo i: es un estado con periodo $i > 1$, es aquel en el que i es el número más pequeño de pasos para regresar al estado inicial. Si un estado recurrente no es periódico, entonces se le llama aperiódico.

Así como se clasifican los estados, también se clasifican las cadenas de Markov como:

- Cadena ergódica: es aquella cadena que describe un proceso en el cual es posible avanzar desde un estado a cualquier otro estado.
- Una matriz ergódica cumple con que el $\lim_{n \to \infty} p^n$ existe. Si todos los estados de una cadena son recurrentes de una misma clase y aperiódicos entonces la cadena es ergódica.
- Cadena absorbente: es cuando en una cadena de Markov existe por lo menos un estado absorbente y es posible ir a él, desde cada estado no absorbente en cierto número de pasos, entonces la cadena se llama absorbente. Una cadena con estado absorbente no puede ser regular.

Para las cadenas absorbentes se requiere tener cierta información para su análisis:

- El número esperado de pasos antes de que el proceso sea absorbido.
- El número esperado de veces que el proceso está en cualquier estado absorbente.
- La probabilidad de absorción por cualquier estado dado.

Para obtener dicha información la matriz de transición debe reescribirse como cuatro submatrices que nos ayudan a obtener la información, esta matriz se representa como:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} I & O \\ A & N \end{bmatrix}$$

Considerando a estados absorbentes y n no absorbentes por lo cual se tendría que $a+n=m$ estados en total. De la matriz se observa que:

- I es la matriz identidad de $a \times n$.
- O es la matriz de cero $a \times n$.
- A es la matriz de $n \times a$ de probabilidades de no absorbente a absorbente.
- N es la matriz de $n \times n$ de probabilidades de no absorbente a no absorbente.

Si hacemos la operación matricial $(I-N)^{-1}$ será el número esperado de veces en el estado no absorbente j, donde la suma de los elementos de dicha operación por renglón representa el número de pasos antes de la absorción, mientras que cada elemento representa el número esperado de veces que el proceso está en un estado no absorbente partiendo de un estado no absorbente cualquiera.

Si realizamos la operación matricial $(I-N)^{-1}A$, obtendremos la probabilidad de absorción.

Procedamos a realizar un ejemplo para mostrar la aplicación de cadenas de Markov.

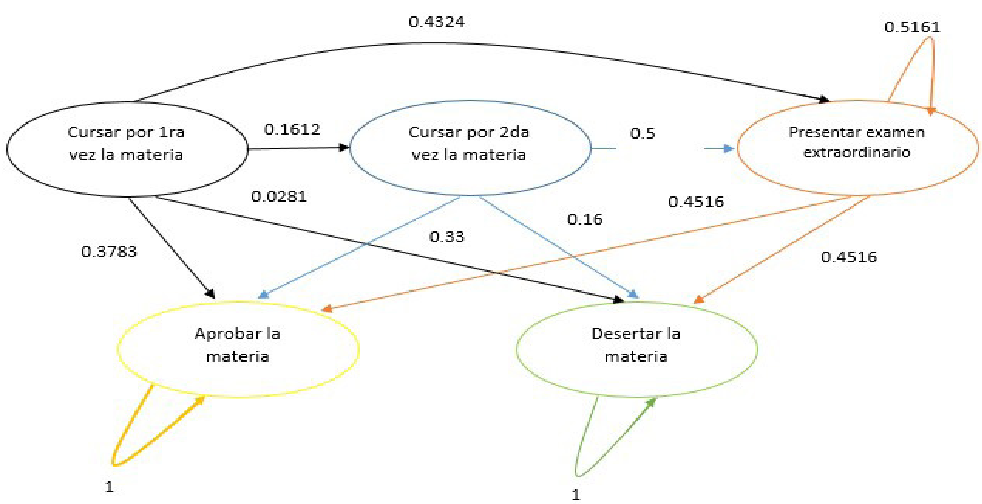
Se analizará un grupo de alumnos que cursan la materia de Matemáticas VI en una escuela preparatoria incorporada a la UNAM, por lo que los resultados obtenidos se proponen por estados, los cuales son:

- E1: Cursar por primera vez la materia Matemáticas VI.
- E2: Cursar por segunda vez la materia de Matemáticas VI.
- E3: Presentar examen extraordinario de la materia Matemáticas VI.
- E4: Acreditar la materia de Matemáticas VI.
- E5: Desertar la materia de Matemáticas VI.

Los resultados se obtienen como se muestra a continuación:

Estado	Número de alumnos
E1	37
E2	6
E3	6
E4	4
E5	1

Cuya representación en estados se muestra a continuación:



Observamos los cinco estados con la interacción entre ellos. Si representamos los estados como una matriz de transición se obtiene la siguiente matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.1612 & 0.4324 & 0.3783 & 0.028 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.33 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0.5261 & 0.4516 & 0.0323 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apreciamos que nuestra matriz de transición P podemos clasificarla como un grupo de submatrices de tipo *IOAN*:

Matriz *N* Matriz *A*

$$P = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0.1612 & 0.4324 & 0.3783 & 0.028 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.33 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0.5261 & 0.4516 & 0.0323 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matriz *O* Matriz *I*

La matriz N de probabilidades de no absorción será:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.1612 & 0.4324 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5261 \end{bmatrix}$$

La matriz de probabilidades de absorción A será:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3783 & 0.028 \\ 0.33 & 0.17 \\ 0.4516 & 0.0323 \end{bmatrix}$$

Para conocer el número de veces que un estudiante está inscrito en la materia de Matemáticas VI antes de acreditarla se obtiene con el análisis $(I-N)^{-1}$, cuyo resultado es:

$$(1-N)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.1612 & 0.4324 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.526 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1612 & 1.0579 \\ 0 & 0 & 1.0311 \\ 0 & 0 & 2.0622 \end{bmatrix}$$

De estas operaciones obtenemos que el número de veces que un alumno tarda en acreditar la materia de Matemáticas VI es de $1 + 0.1612 + 1.0579 = 2.2191$ cursos.

Para conocer las probabilidades de un estado absorbente, las obtendremos a partir de la expresión $(I-N)^{-1}A$, de donde sacamos los resultados siguientes:

$$(1-N)^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1612 & 1.0579 \\ 0 & 0 & 1.0311 \\ 0 & 0 & 2.0622 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3783 & 0.028 \\ 0.33 & 0.17 \\ 0.4516 & 0.0323 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9092 & 0.0896 \\ 0.7956 & 0.2033 \\ 0.9312 & 0.0666 \end{bmatrix}$$

De los resultados obtenidos observamos las probabilidades de que un alumno que cursa por primera vez la materia de Matemáticas VI acredite en algún curso es de 0.9092, mientras que la probabilidad de que un alumno que cursa por primera vez la materia de Matemáticas VI deserte la materia es de 0.0896.

1
2
3
4
5

Y finalmente hacemos una estimación de alumnos que cursarán nuevamente la materia, para una población de 37 alumnos promedio que cursan por primera vez la materia de Matemáticas VI, se tendrá que realizar el producto del número promedio de alumnos que cursan por primera vez la materia de Matemáticas VI por la probabilidad de cursar por segunda vez la materia de Matemáticas VI, el cual será de: 37 (0.1612) = 5.9644 que son los alumnos que aproximadamente cursarán por segunda vez la materia de Matemáticas VI.

Por lo que se tendrá que considerar 46 bancas en un salón para un siguiente curso de Matemáticas VI.

3.7 Conclusiones

La importancia de conocer y estudiar a la matemática no es únicamente porque está presente en la vida cotidiana, sino porque es una ciencia que aporta beneficios tales como favorecer el desarrollo del razonamiento y el pensamiento analítico pues nos ayuda a conocer el mundo que nos rodea a través de habilidades como investigar, ya que buscamos la verdad basada en evidencias y no en nociones.

Educar en matemáticas a las personas desde edad temprana permite desarrollar la capacidad de pensamiento, ya que se requiere un proceso de análisis coherente, por lo que ordenar ideas y expresarlas de forma clara es resultado de una mente activa. Fomenta conocimiento, curiosidad y satisfacción; al resolver un problema que involucre matemáticas, ¿no se siente una sensación positiva?

“

Las matemáticas son el arte de darle el mismo nombre a muchas cosas” J.H. Poincaré

“Las matemáticas son la música de la razón” Sylvester

1
2
3
4
5

CAPÍTULO 4

Control de inventario

Luis Armando Mata García

4.1 Introducción

En toda organización es muy importante saber la cantidad de artículos, insumos, materias primas o maquinaria que se cuenta para otorgar un producto o servicio de calidad.

Es común que, al otorgar un producto de calidad, y acompañarlo de una buena estrategia de publicidad, la demanda del mercado aumente más de lo que se tenía contemplado previamente. Por el contrario, un producto deficiente o una mala campaña de publicidad puede llevarnos a no vender lo esperado.

El problema central es el equilibrar la oferta con la demanda, tomando en cuenta las proyecciones de ventas, y el costo que pueda generar el mantener guardado el producto.

1
2
3
4
5

4.2 Consideraciones

Para comenzar plantearemos consecuencias que puede acarrear el no tener un inventario óptimo, lo cual podría repercutir monetariamente.

El primer caso se define cuando la pérdida monetaria se refleja de una forma virtual, ya que todo lo que se oferta se ha vendido y, las proyecciones de ventas claramente fueron más altas de las esperadas.

Sin embargo, las pérdidas en la fidelidad de algún cliente pueden ser mucho más dañinas a la larga, ya que, al no poder ofrecer el servicio o producto en el momento solicitado, el cliente puede preferir a la competencia que le asegure su producto en tiempo y forma.

Por otra parte, existe un costo al que denominaremos "costo de almacén", el cual consiste en el precio que se tiene al contar con un espacio más amplio o el que se realice mantenimiento constante para no bajar el precio o la calidad del producto.

Tener una mayor oferta que la demanda que se presenta, nos puede ayudar a crear ofertas y promociones que aumenten la popularidad del producto y al mismo tiempo nos lleva a incrementar el costo por colocar algún producto (venderlo).

Sin embargo, se debe ser cauteloso. Ya que el aumento sin control en las ventas de algún producto nos podría llevar al problema planteado al inicio.

Entonces, ¿qué es mejor?, por un lado, se podría tener un almacén completamente lleno y, con ello se podrían colocar los productos en cualquier momento que se requiera, además de poder ofertar precios menores en compras por mayoreo. Pero, tendríamos un costo elevado en mantenimiento del producto.

Por otro lado, el no tener suficiente oferta, nos puede llevar a no escalar el negocio a las proyecciones esperadas debido a la pérdida de clientes altamente potenciales.

Ante esta problemática, estableceremos un método de control de inventarios, el cual se basa en comparar los costos originados por vender algún producto versus el costo de almacenaje.

Todos los elementos tales como los sueldos del vendedor, regalías, cuota de inscripción a algún servicio, pago a proveedores, costo de envío, etc., se deben de agrupar en un concepto llamado "precio unitario", de tal forma que sabremos exactamente cuánto cuesta vender el producto.

Mientras que el costo de almacenaje considera los elementos tales como el precio de la renta del lugar, sueldos de acomodadores, limpieza, electricidad (en casos de cadenas frías[1]).

4.3 Modelo de Wilson (Demanda constante)

Este modelo fue desarrollado por el consultor R.H. Wilson en 1934, el cual se basa en considerar los costos de almacenaje y de venta, así como la demanda de algún producto.

1 Se refiere a todos los productos que requieren mantenerse en refrigeración para su correcto almacenaje.

1
2
3
4
5

En esta ocasión se aborda el caso del modelo de Wilson, mejor conocido como método de la demanda constante.

Además, en este modelo, se asume que el costo por el almacenaje y el costo por la venta y/o colocación del producto también permanece constante, lo que nos limitará para poder jugar con los cambios de los precios con base en la inflación y otros aspectos nacionales, pero que nos otorga una herramienta para mantener un correcto almacenaje y actualizarlo mes con mes para verificar los supuestos previamente establecidos.

Para obtener el pedido óptimo se debe considerar las siguientes fórmulas que nos ayudarán a minimizar los costos originados.

Costo anual por colocar los pedidos

$$Ca = Costo(p) * \frac{D}{Q} \tag{1}$$

Costo anual por mantener en almacén los productos

$$Cm = Costo(a) * M * \frac{Q}{2} \tag{2}$$

Pedido óptimo

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * Costo(p) * D}{Costo(a) * M}} \tag{3}$$

Número óptimo de pedidos anuales

$$N^* = \frac{D}{Q^*} \tag{4}$$

Ciclo en días en que se debe realizar el pedido

$$t^* = \frac{365}{N^*} \tag{5}$$

De las ecuaciones anteriores, las variables se describen a continuación:

- D = Demanda anual de pedidos
- Costo(p) = Costo por colocar o vender algún producto en un punto de venta
- Q = Cantidad de pedido
- Costo(a) = Costo unitario de cada artículo
- M = Porcentaje anual por mantenimiento
- Q* = Se refiere al pedido óptimo para minimizar costos
- N* = Número de pedidos que se deben realizar al año
- t* = Periodo en que se deben realizar los pedidos
- Ca = Costo anual de colocar o vender los pedidos
- Cm = Costo anual del mantenimiento de los productos

4.4 Caso de estudio: Entrega de material escolar

Aplicaremos este modelo a un caso en el cual una escuela debe repartir material didáctico específico a cada alumno. El material se entrega de forma mensual y se genera un costo por entregarlo de $400.00 y un costo por almacenarlo de $120.00 derivado de mantener en óptimas condiciones el material y los sueldos respectivos.

También se considera que existe un porcentaje del 9% que corresponde a los gastos por reacomodo, limpieza adicional de fumigación.

La escuela estima que al año deberá repartir material a 75 alumnos por mes, estableciendo como hipótesis que ningún alumno se dará de baja de los cursos.

Además, por políticas de los directivos, los pedidos del material que la escuela necesita para repartir a los alumnos solo pueden ser enviados en lotes de diez piezas, por lo que, en caso de necesitar un producto extra, se deben pedir 10 adicionales.

Aplicando las fórmulas definidas, obtenemos lo siguiente:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * Costo(p) * D}{Costo(a) * M}} = \sqrt{\frac{2 * \$400 * (75 * 12)}{\$120 * 9\%}} \approx 258 \; materiales$$

$$N^* = \frac{D}{Q^*} = \frac{900}{238} \approx 3.5 \; veces \; al \; año$$

$$t^* = \frac{365}{N^*} \approx 105 \; días \; (tres \; meses \; y \; medio)$$

Con base en las características de la escuela y los costos que genera cada elemento, quiere decir que se necesita pedir 258 materiales didácticos, cada tres meses y medio, o lo que es lo mismo que realizar 3.5 veces ese pedido al año.

El costo de ese pedido sería de $2789.00, el cual se desglosa de la siguiente forma.

Costo total	Costo colocación	Costo almacenaje
$ 2,789. -	$ 1,385. -	$ 1,404. -
100%	49.6%	50.4%

Hemos observado, cómo las fórmulas obtenidas por R.H. Wilson nos han ayudado a obtener un inventario óptimo, a continuación, estudiaremos cómo se obtiene dicho pedido óptimo de forma gráfica.

Utilizaremos las fórmulas (1) y (2) para verificar gráficamente que el pedir 260 materiales no afecte al costo total.

Costo de colocación vs Costo de almacenaje

$$Ca = Costo(p) * \frac{D}{Q} \quad \text{vs} \quad Cm = Costo(a) * M * \frac{Q}{2}$$

Para visualizar la dinámica en que se mueven los datos, los acomodaremos en pedidos con aumentos en decenas, para cumplir con la política de pedidos.

1
2
3
4
5

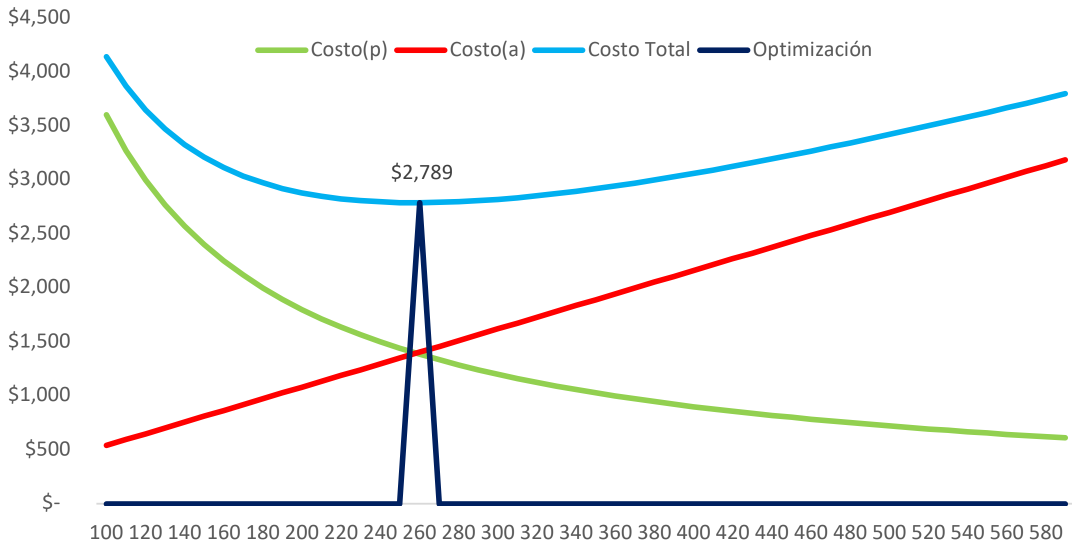
Tabla 1. Costos comparativos

Pedidos Q	Costo(p)	Costo(a)	Costo Total
100	$ 3,600	$ 540	$ 4,140
110	$ 3,273	$ 594	$ 3,867
120	$ 3,000	$ 648	$ 3,648
130	$ 2,769	$ 702	$ 3,471
140	$ 2,571	$ 756	$ 3,327
150	$ 2,400	$ 810	$ 3,210
160	$ 2,250	$ 864	$ 3,114
170	$ 2,118	$ 918	$ 3,036
180	$ 2,000	$ 972	$ 2,972
190	$ 1,895	$ 1,026	$ 2,921
200	$ 1,800	$ 1,080	$ 2,880
210	$ 1,714	$ 1,134	$ 2,848
220	$ 1,636	$ 1,188	$ 2,824
230	$ 1,565	$ 1,242	$ 2,807
240	$ 1,500	$ 1,296	$ 2,796
250	$ 1,440	$ 1,350	$ 2,790
260	$ 1,385	$ 1,404	$ 2,789
270	$ 1,333	$ 1,458	$ 2,791
280	$ 1,286	$ 1,512	$ 2,798
290	$ 1,241	$ 1,566	$ 2,807
300	$ 1,200	$ 1,620	$ 2,820
310	$ 1,161	$ 1,674	$ 2,835
320	$ 1,125	$ 1,728	$ 2,853
330	$ 1,091	$ 1,782	$ 2,873
340	$ 1,059	$ 1,836	$ 2,895
350	$ 1,029	$ 1,890	$ 2,919
360	$ 1,000	$ 1,944	$ 2,944
370	$ 973	$ 1,998	$ 2,971
380	$ 947	$ 2,052	$ 2,999
390	$ 923	$ 2,106	$ 3,029
400	$ 900	$ 2,160	$ 3,060
410	$ 878	$ 2,214	$ 3,092
420	$ 857	$ 2,268	$ 3,125
430	$ 837	$ 2,322	$ 3,159
440	$ 818	$ 2,376	$ 3,194
450	$ 800	$ 2,430	$ 3,230

En la tabla 1 se puede observar que, a mayor cantidad de materiales pedidos, menor es el costo por colocación, en cambio, cuanto mayor es la cantidad de materiales, los costos de almacenaje aumentan en la misma proporción.

1
2
3
4
5

Gráfica 1.1 Optimización del inventario



En la gráfica 1.1 podemos observar cómo el punto en que se cruza el costo de colocación con el costo de almacenaje coincide con el punto donde se minimiza el costo total.

En conclusión, se pudo comprobar mediante el método gráfico y con la fórmula de Wilson que se llega al mismo resultado y, además, se podrá actualizar la demanda, los precios de venta y de mantenimiento en futuros experimentos.

CAPÍTULO 5
Algoritmo JPEG

Victoria Mayela Luna Rojas

5.1 Introducción

Un píxel es la unidad mínima de información de una imagen; la cual contiene los datos referentes al color, saturación y brillo.

Dependiendo del tipo de imagen digital, un píxel estará compuesto de cierto número de bits para describir el color de este, a lo que se le conoce como profundidad de color. Mientras más bits se tengan, mayor será la gama de tonos que pueden ser representados.

Por ejemplo, si la imagen es monocromática estará compuesta por píxeles de 1 bit cada uno. Si está en escala de grises, cada píxel generalmente varía entre 2 a 8 bits. Mientras que una imagen de color tendrá una profundidad de entre 8 y 24 bits o más, usualmente divididos en tres grupos de 8 bits cada uno (modelo RGB).

Debido a que en el mundo actual se necesita agilizar la transmisión y el almacenamiento de las imágenes digitales, se han creado diversos métodos de compresión que reducen la cantidad de bits utilizados para representar la información de estas.

Algunas de las técnicas existentes para la compactación de una imagen se conocen como algoritmos de compresión con pérdida, los cuales remueven información redundante o que no es perceptible al ojo humano, dando como resultado que al término del proceso no se tenga una copia exacta de la imagen original sino una aproximación de esta.

5.2 Estándar JPEG

En el año de 1992 surgió un estándar internacional para la compresión de imágenes digitales propuesto por los miembros del *Joint Photographic Experts Group* (JPEG); el cual es de los más usados actualmente.

Este algoritmo aprovecha dos limitaciones conocidas del ojo humano, a saber:

- Es más sensible a los cambios de brillo que a los de color (capta mejor los cambios en la luminancia que en la cromancia).
- Distingue con mayor facilidad pequeños cambios de brillo en zonas homogéneas que en zonas con variación grande (como bordes de objetos).

Aunque las distorsiones introducidas por este algoritmo no son evidentes en un inicio, estas se vuelven cada vez más notorias mientras más veces se aplique el algoritmo sobre una misma imagen; es decir, la pérdida de calidad es acumulativa.

1
2
3
4
5

Cabe señalar que el algoritmo inicial ha sufrido modificaciones a lo largo del tiempo para mejorarlo. Hoy en día incluso hay una versión para compresión sin pérdida.

En el presente capítulo vamos a describir de manera general el algoritmo JPEG con pérdida. Por cuestiones didácticas, solo estudiaremos imágenes en escala de grises; para imágenes en color se agregan unos ajustes adicionales a los descritos.

5.3 Algoritmo JPEG

El algoritmo JPEG se compone de tres etapas sucesivas principales:

1. Transformación
2. Cuantificación
3. Codificación

En primera instancia, la imagen en escala de grises que se desea comprimir se divide en bloques de 8×8 píxeles, de forma que cada bloque puede ser representado como una matriz $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ cuyos elementos a_{ij} representan la intensidad del píxel (i, j). En el caso de las imágenes a color son necesarias tres matrices, cada una representa los colores básicos del modelo RGB.

Para ilustrar los pasos del algoritmo tomaremos como referencia la imagen de la figura 1. Debido a que cada bloque de 8 x 8 píxeles se procesa de forma independiente a los demás, utilizaremos el bloque de la figura 3 ubicado en la fila 4 y columna 8 de la figura 2.

Figura 1

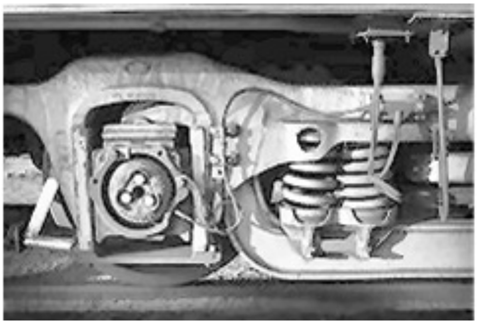


Figura 2

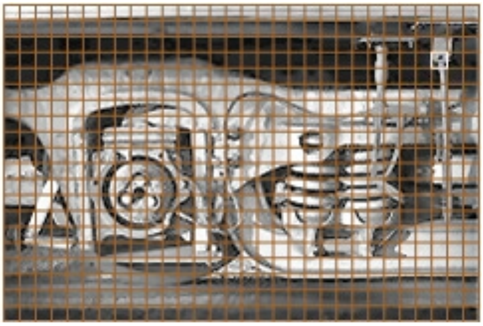


Figura 3

La matriz que representa el valor de cada píxel de la figura 3 es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 176 & 193 & 168 & 168 & 170 & 167 & 165 \\ 6 & 176 & 158 & 172 & 162 & 177 & 168 & 151 \\ 5 & 167 & 172 & 232 & 158 & 61 & 145 & 214 \\ 33 & 179 & 169 & 174 & 5 & 5 & 135 & 178 \\ 8 & 104 & 180 & 178 & 172 & 197 & 188 & 169 \\ 63 & 5 & 102 & 101 & 160 & 142 & 133 & 139 \\ 51 & 47 & 63 & 5 & 180 & 191 & 165 & 5 \\ 49 & 53 & 43 & 5 & 184 & 170 & 168 & 74 \end{pmatrix}$$

Transformada de coseno discreta (DCT)

El paso clave para el proceso de compresión es la transformación lineal conocida como la transformada de coseno discreta (DCT por sus siglas en inglés). Ya que se usa para representar el contenido de la imagen (información espacial) en forma de datos numéricos (información de frecuencia o espectral), y así tener la información en forma cuantitativa que pueda ser manipulada para la compresión.

La DCT está diseñada para valores enteros que van de −128 a 127, por lo que a cada entrada de la matriz A se le debe restar el valor 127. Dando como resultado:

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 20 & 13 & 13 & 28 & 52 & 48 \\ 17 & 25 & 13 & 20 & 13 & 21 & 40 & 52 \\ 25 & 28 & 9 & 40 & 36 & 35 & 25 & 45 \\ 41 & 18 & 29 & 33 & 25 & 28 & 9 & 33 \\ 35 & 21 & 29 & 21 & 13 & 9 & 20 & 35 \\ 20 & 40 & 13 & 28 & 28 & 13 & 9 & 35 \\ 9 & 29 & -4 & 40 & 35 & 17 & 13 & 20 \\ 21 & 28 & 9 & 28 & 25 & 20 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

Para una matriz cuadrada de orden N la fórmula de la transformada se muestra a continuación:

$$DCT(i,j) = \frac{1}{\sqrt{2N}} C(i)C(j) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} pixel(x,y) \cos\left[\frac{\pi(2x+1)i}{2N}\right] \cos\left[\frac{\pi(2y+1)j}{2N}\right]$$

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Otra forma de visualizar la transformación es en la siguiente forma matricial:

$$U = DTC(B) = CBC^{t}$$

Donde C es una matriz invertible y ortogonal definida como sigue:

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{13\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) \\
\cos\left(\frac{2\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{10\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{14\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{18\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{22\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{26\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{30\pi}{16}\right) \\
\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{21\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{33\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{39\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{45\pi}{16}\right) \\
\cos\left(\frac{4\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{12\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{20\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{28\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{36\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{44\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{52\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{60\pi}{16}\right) \\
\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{25\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{35\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{45\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{55\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{65\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{75\pi}{16}\right) \\
\cos\left(\frac{6\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{18\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{30\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{42\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{54\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{66\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{78\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{90\pi}{16}\right) \\
\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{21\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{35\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{49\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{63\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{77\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{91\pi}{16}\right) & \cos\left(\frac{105\pi}{16}\right)
\end{pmatrix}$$

Cabe aclarar que la matriz C es la misma para cada uno de los bloques de la imagen que se va a procesar.

En nuestro ejemplo, obtenemos:

$$U = \begin{pmatrix} -27.50 & -213.47 & -149.61 & -95.28 & -103.75 & -46.95 & -58.72 & 27.23 \\ 168.23 & 51.61 & -21.54 & -239.52 & -8.24 & -24.49 & -52.66 & -96.62 \\ -27.20 & -31.24 & -32.28 & 173.39 & -51.14 & -56.94 & 4.00 & 49.14 \\ 30.18 & -43.07 & -50.47 & 67.13 & -14.11 & 11.14 & 71.01 & 18.04 \\ 19.50 & 8.46 & 33.59 & -53.11 & -36.75 & 2.92 & -5.80 & -18.39 \\ -70.59 & 66.88 & 47.44 & -32.61 & -8.19 & 18.13 & -22.99 & 6.63 \\ 12.08 & -19.13 & 6.25 & -55.16 & 85.59 & -0.60 & 8.03 & 11.21 \\ 71.15 & -38.37 & -75.92 & 29.29 & -16.45 & -23.44 & -4.21 & 15.62 \end{pmatrix}$$

Esta transformación concentra la representación de la imagen en los coeficientes de la parte superior izquierda de U (valores con la mayor magnitud en valor absoluto), mientras que la información menos relevante se concentra en la parte inferior derecha.

A continuación, se muestra en la figura 4 el bloque transformado.

Figura 4

Cuantificación

La siguiente etapa del algoritmo consiste en la cuantificación de la matriz U, la cual consiste en dividir cada entrada de la matriz obtenida después de la transformación DCT (matriz U) entre los elementos de una matriz de cuantificación Q para posteriormente redondearlos al entero más cercano.

1
2
3
4
5

De esta forma se eliminan las frecuencias mayores, es decir, los datos que nos son menos útiles para representar la imagen. Al mismo tiempo, se reduce la cantidad de bits necesarios para almacenar los valores de la matriz resultante R, ya que esta contendrá números enteros pequeños.

El estándar JPEG propone diversos valores establecidos para Q, para nuestro ejemplo usaremos:

$$Q = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}$$

La matriz cuantificada R la definimos como:

$$R_{jk} = \left[\frac{U_{jk}}{Q_{jk}}\right] \; j,k = 1,\cdots,8$$

Al realizar las operaciones correspondientes obtenemos:

$$R = \begin{pmatrix} -2 & -19 & -15 & -6 & -4 & -1 & -1 & 0 \\ 14 & 4 & -2 & -13 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la figura 5 se muestra el bloque cuantificado.

Figura 5

Ahora, es en este paso donde se pierde información; ya que tanto la transformada DCT como la operación de dividir dos números son invertibles, pero el redondeo no.

Compresión

La última etapa del código es la codificación de la matriz cuantificada R para almacenarla. Para esto, en primera instancia se crea una secuencia con los valores de R siguiendo un patrón en zigzag con el objetivo de que los valores iguales a cero, que se encuentran en la parte inferior derecha de R, queden acumulados al final.

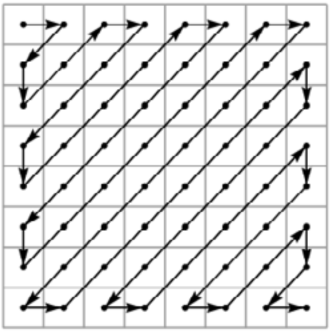


Figura 6

En nuestro caso, obtenemos la siguiente lista:

$$R = \begin{pmatrix} -2 & -19 & -15 & -6 & -4 & -1 & -1 & 0 \\ 14 & 4 & -2 & -13 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-2 -19 14 -2 4 -15 -6 -2 -2 2 1 -3 -2 -13 -4 -1 0 7 -2 0 -3 0 2 1 2 -1 0 -1 0 -1 -1 0 -1 1 0 1 0 0 -1 -1 0 0 -2 1 1 0 0-1 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Se disponen métodos que permiten almacenar cadenas de números con muchos ceros seguidos. Un ejemplo sería:

-2 -19 14 -2 4 -15 -6 -2 -2 2 1 -3 -2 -13 -4 -1 0 7 -2 0 -3 0 2 1 2 -1 0 -1 0 -1 -1 0 -1 1 0 1 0 0 -1 -1 0 0 -2 1 1 0 0-1 -1 0 1 Z13

Donde los caracteres *Z*13 indican que se deben almacenar 13 ceros.

Por el último el algoritmo JPEG codifica la lista final usando una versión del código de Huffman y finaliza.

5.4 Reconstrucción de la imagen

Para reconstruir la imagen a partir de la información comprimida y almacenada se aplica un proceso inverso al descrito anteriormente.

La matriz de cuantificación al estar almacenada en el archivo permite volver a calcular los valores aproximados de los coeficientes de la matriz transformada, para posteriormente aplicar la transformación DCT inversa y de esta forma obtener la reconstrucción de la matriz original de cada uno de los bloques en los que se partió la imagen digital.

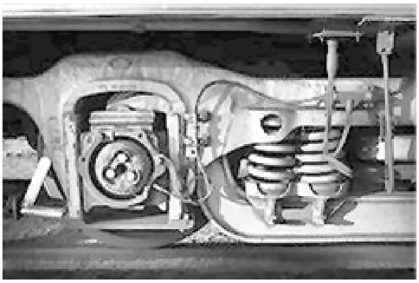


Figura 7. Imagen original

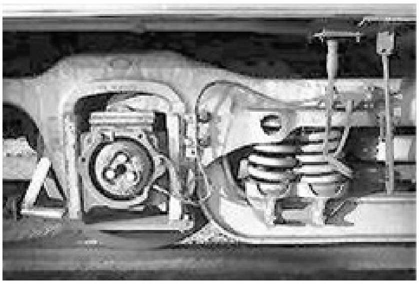


Figura 8. Imagen comprimida

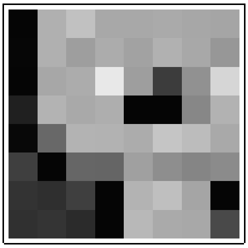


Figura 9. Bloque original

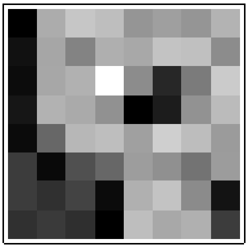


Figura 10. Bloque comprimido

1

2

3

4

5

BIBLIOGRAFÍA

Ángel Ángel, J. (s. f.). *Criptografía. Ejercicios de cifrado usando matrices.* Recuperado 25 de enero de 2021, de http://www.math.com.mx/docs/cur/cur_1_002_Criptografia.pdf

Austin, D. (2007, septiembre). *Image Compression: Seeing What's Not There.* American Mathematical Society. http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-image-compression

Benítez López, J. (2016). El sistema de compresión JPEG. Un pequeño paseo por la transformada discreta de Fourier y la transformada coseno. *La Gaceta de la RSME*, 19(1), 25-45. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1301

Criptografía para principiantes. (s. f.). MathCon. Recuperado 25 de enero de 2021, de http://www.math.com.mx/criptografia.html

D. Aguirre, y L. Vallejo. (2007) *Modelo de gestión administrativa y de costos para panadería en el centro de reclusión de mujeres de Pereira.* Tesis de Pregrado, Ingeniería Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira.

Del Valle, J. (2011). *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias* (pp. 591–594). McGraw-Hill.

Fraile, J. (2012). *Circuitos eléctricos* (pp. 4–40). Pearson.

Grossman, S. I. (2006). *Álgebra Lineal* (2.a ed.). Thomson editores.

Hillier, F. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones* (9.a ed.). McGraw-Hill.

Hines, W. (2005). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería* (3.a ed.). Continental.

Image Compression: How Math Led to the JPEG200 Standard. (s. f.). Why Do Math? Recuperado 15 de diciembre de 2020, de https://www.whydomath.org/node/wavlets/basicjpg.html

Introducción a la criptografía. (s. f.). Recuperado 25 de enero de 2021, de http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/matematica_discreta/web/aritmetica_modular/criptografia.html

Izar, J., García, V., & Cortés, C. (2010). *Metodología para determinar el nivel óptimo de inventario.* ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/277954670_Metodologia_para_determinar_el_nivel_optimo_de_inventario

Lay, D. C. (2000). *Linear Algebra and Its Applications* (3.a ed., pp. 209, 210, 367–386). Addison Wesley Longman Inc.

Lezama, J. (2017). *Compresión de imágenes: formato JPEG.* Revista de Educación Matemática, 32(2), 23-34. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/18372

Pastor, A., & Ortega, J. (2014). *Circuitos eléctricos* (Vol. 1). UNED-Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Pilawski, K. (2001). *An interesting application of linear algebra.* University of Washington. https://sites.math.washington.edu/~king/coursedir/m308a01/Projects/m308a01-pdf/pilawski.pdf?fbclid=IwAR1JFGifHnsZ9Tx0vgoP3d6EVHnZvyEBRxjkFQaTQFKSRe7UGBQwjjrIl9k

Rojas, A., & Cano, A. (2009). *Aplicaciones del Álgebra Lineal en la vida cotidiana.* ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/216456908_Aplicaciones_del_Algebra_Lineal_en_la_vida_cotidiana

Solar G., & Speziale, L. (1996). *Apuntes de Álgebra Lineal* (3.a ed.). Limusa.

Speziale, L. (2007). *Transformaciones Lineales* (1.a ed.). Facultad de Ingeniería, UNAM.

Stanford University. (s. f.). *JPEG*. Recuperado 14 de diciembre de 2020, de https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/data-compression/lossy/jpeg/index.htm

Taha, H. A. (2012). *Investigación de operaciones* (9.a ed.). Pearson.

UNAM. (s. f.). *La criptografía el secreto de las comunicaciones seguras.* Revista seguridad. Recuperado 25 de enero de 2021, de https://revista.seguridad.unam.mx/numero-11/lacriptograf%C3%AD-el-secreto-de-las-comunicacionesseguras

Universidad de Guanajuato. (2019). Compresión y encriptación de información utilizando SVD. http://www.veranos.ugto.mx/wp-content/uploads/2019/12/EDUARDO-CABAL_compressed.pdf

Vidal, C. J. (2010). *Fundamentos de Control y Gestión de Inventarios* (1.a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.

[Figura 1, Figura 2, Figura 3, Figura 4, Figura 5, Figura 8, Figura 10]. (s. f.). https://www.whydomath.org/node/wavlets/basicjpg.html

[Figura 6]. (s. f.). http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-image-compression

ANEXO A

Supongamos que tenemos un conjunto de tres vectores $\{i, j, k\}$. Para encontrar si este conjunto es ortogonal o no, consideramos los tres posibles pares de vectores, a saber, $\{i, j\}$, $\{i, k\}$ y $\{j, k\}$.

$$\hat{\imath}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} \quad \hat{\jmath}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} \quad k\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$$

$$i \bullet j = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$j \bullet k = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

$$i \bullet k = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

Cada par de vectores distintos es ortogonal, por lo que $\{i, j, k\}$ es un conjunto ortogonal. Ossimumusatum inat patiam, et? Od fate cultu que cus.

Aplicaciones al álgebra linear
se publicó la primera edición electrónica de un
ejemplar (3 MB) en formato PDF en junio de 2022, en el
repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad
Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad
de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería.
Las familias tipográficas utilizadas son Barlow para
texto y Roboto Slab para títulos con
sus respectivas variantes.